TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2018-08-31, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Linnea Hietala, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x^2}+1}; \qquad \textbf{(b)} \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x}\,dx; \qquad \textbf{(c)} \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx;$$

$$\textbf{(d)} \int_{0}^{1} \sqrt[5]{x}\,\ln^2 x\,dx; \qquad \textbf{(e)} \int_{0}^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^5+x+1}}\,dx; \qquad \textbf{(f)} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-2x^2+1}}.$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2-x}-e^{-x}}{e^{x^2+x}+e^{x}} \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\sin x\cdot\tan x} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$. (4p)

5. Finn alla lokala extrema till funktionen $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, för $x>0$, och avgör deras karaktär. (5p)

6. Beräkna arean av den begränsade figuren som avgränsas av de två parablerna $y^2 = 2px$, och $x^2 = 2py$, där parametern p är positiv. (6p)

7.(a) Ge definitionen för $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. (2p)

(b) Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^5} = \infty$. (OBS! Det ges inga poäng om man bara hänvisar till det relevanta standardgränsvärdet, det ska härledas.) (6p)

8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats, inklusive Rolles sats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA Inledande matematisk analys F1/TM1

Lösningar 31/8 -18

1. (a) divergent; (b) divergent; (c) konvergent; (d) konvergent; (e) divergent; (f) divergent.

---

2. (a)
$$\frac{e^{x^2-x}-e^{-x}}{e^{x^2+x}+e^{x}} = \frac{e^{-x}\left(e^{x^2}-1\right)}{e^{x}\left(e^{x^2}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{1-\frac{1}{e^{x^2}}}{1+\frac{1}{e^{x^2}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0$$

(b)
$$\frac{\cos x + 1}{\sin x \cdot \tan x} = \left[\begin{array}{l} x = t+\pi \\ x\to\pi \iff t\to 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{\cos(t+\pi)+1}{\frac{\sin^2(t+\pi)}{\cos(t+\pi)}} = -\cos t \cdot \frac{1-\cos t}{(-\sin t)^2} =$$

$$= -\cos t \cdot \frac{2\cancel{\sin^2\frac{t}{2}}}{4\cancel{\sin^2\frac{t}{2}}\cos^2\frac{t}{2}} \longrightarrow -1 \cdot \frac{2}{4\cdot 1} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

3. $D_f = \mathbb{R}$ $\left(f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \right)$ 2

Nollställen: endast $x = 1$

Tecken: $f(x) < 0 \quad \forall x < 1$,

$> 0 \quad \forall x > 1$

Inga symmetrier

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}{|x|\sqrt{1 + \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}} = \pm 1$$

$\Rightarrow$ f har horisontella asymptoter i $\pm\infty$, som är $y = \pm 1$

Inga vertikala asymptoter

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+4} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}} \cdot (x-1)}{x^2+4} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 4 - \cancel{x^2} + x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x+4}{(x^2+4)^{3/2}}$$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ f har lok. min i $x = -4$

$$f''(x) = \frac{1 \cdot (x^2+4)^{3/2} - \frac{3}{\cancel{2}}(x^2+4)^{1/2} \cdot \cancel{2}x \cdot (x+4)}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{x^2+4 - 3x(x+4)}{(x^2+4)^{5/2}} = \frac{-2x^2 - 12x + 4}{(x^2+4)^{5/2}}$$

$f''=0$: $x^2+6x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{1}=-3\pm\sqrt{11}$$

nämnaren i f'' är >0;

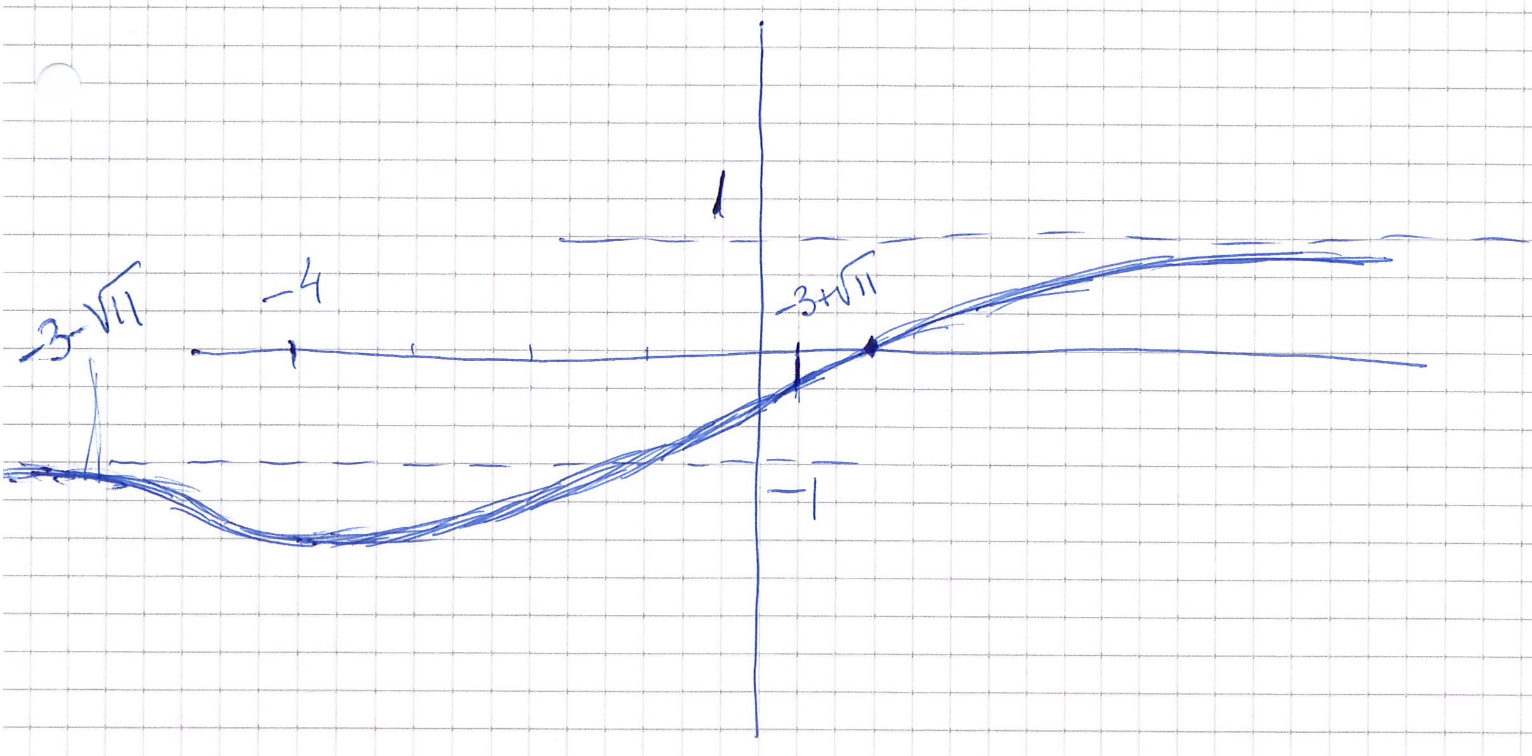
täljaren:

mellan -7 och -6 mellan 0 och 1

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{11}$		$-3+\sqrt{11}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ f har två inflexionspkter, eftersom f'' byter tecken i sina nollställen

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{11}$		-4		$-3+\sqrt{11}$		1		$+\infty$
f	-1		infl.		lok. min		infl.		0		$+1$
f'		$-$	$-$		0		$+$			$+$	
f''		$-$	0		$+$		0			$-$	



4\. (a) $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx \overset{p.i.}{=}$ $\boxed{4}$

$\underline{x>0}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int\frac{x+1-1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1) \quad (+C)$$

(b) Sätt $t^3 = \dfrac{2-x}{2+x}$

$$2t^3 + xt^3 = 2-x, \qquad x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}$$

$$dx = \frac{-6t^2(1+t^3) - 3t^2(2-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt =$$

$$= \frac{-6t^2 - \cancel{6t^5} - 6t^2 + \cancel{6t^5}}{(1+t^3)^2}dt = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$2-x = 2 - \frac{2-2t^3}{1+t^3} = \frac{\cancel{2} + 2t^3 - \cancel{2} + 2t^3}{1+t^3}$$

$x=0$: $t=1$, $x=1$: $t=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$$\text{integralen} = \int_1^{1/\sqrt[3]{3}} \frac{2}{\left(\frac{4t^3}{\cancel{1+t^3}}\right)^2}\cdot t\cdot\frac{-12t^2}{\cancel{(1+t^3)^2}}dt =$$

$$= \int_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}^{1}\frac{3}{2t^3}dt = -\frac{3}{4}\left[\frac{1}{t^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{1} = +\frac{3}{4}\left(-1+3^{2/3}\right)$$

5. $F'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$ $\triangle 3$

för $x = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$

$x > 0$; sin byter tecken i $k\pi$

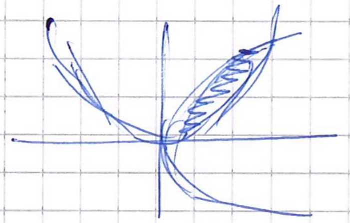
$F' > 0$ i $(0, \pi)$, < 0 i $(\pi, 2\pi)$

induktivt:

F har lok. max i $x = 2n\pi + \pi$

lok. min i $x = 2n\pi$

6.



$p > 0$

Vi tar fram skärningspunkterna:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x^2 = 2py \end{cases} \qquad x = \frac{1}{2p} y^2$$

$$\frac{1}{(2p)^2} y^4 = 2py$$

$$y^4 = (2p)^3 y \qquad y\left(y^3 - (2p)^3\right) = 0$$

$y_1 = 0$ ger $x = 0$

$y_2 = 2p$ ger $x = 2p$

$$\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} = \sqrt{2px}\left(1 - \frac{x^{3/2}}{(2p)^{3/2}}\right) \geq 0 \qquad \underline{0 \leq x \leq 2p}$$

$\Rightarrow$ parabeln $y^2 = 2px$ ligger överst i det intervallet

$$\Rightarrow \text{arean} = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx =$$

$$= \left[\sqrt{2p}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2p} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot\left(\sqrt{2p}\right)^{3/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2p}}\cdot(2p)^{\cancel{3}\,2} - 0 + 0$$

$$= \frac{2}{3}(2p)^2 - \frac{1}{3}\cdot(2p)^2 = \frac{4}{3}p^2$$