TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2017-12-21, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Johannes Borgqvist, ankn. 5325, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, det vill säga konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx; \quad \textbf{(b)} \int_0^1 \sqrt{x}\ln x\, dx; \quad \textbf{(c)} \int_e^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\, dx;$$

$$\textbf{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx; \quad \textbf{(e)} \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\, dx; \quad \textbf{(f)} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\, dx;$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos x - 1}{\tan x} \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4x^3+1}} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln^2 x$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arccos^2 x$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$. (3p)

5. Betrakta följden

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

(a) Visa att gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar. (3p)

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} a_n$. (3p)

6.(a) Skissa graferna till funktionerna $f(x) = \cos(\arccos x)$ och $g(x) = \arccos(\cos x)$ i deras respektive definitionsmängder. (3p)

(b) Visa att funktionen $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$, $x\in[-1,1]$, är ett polynom av x av grad n, och bestäm koefficienten för x^n. (5p)

7. Formulera och bevisa kedjeregeln för derivering av sammansatt funktion. (6p)

8. Visa insättningsformeln för beräkning av Riemannintegralen av en kontinuerlig funktion. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F / TM

Lösningar 21/12 − 17

1. (a) divergent ; (b) konvergent ;
(c) divergent ; (d) divergent ;
(e) divergent ; (f) konvergent.

---

2. (a) $\dfrac{e^x \cos x - 1}{\tan x} = \dfrac{e^x \cos x - e^x + e^x - 1}{\tan x} =$

$$= e^x \frac{\cos x - 1}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} + \frac{e^x - 1}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} =$$

$$= -e^x \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} + \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cos x$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

(b) $$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4x^3+1}} = \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x\sqrt[3]{4+\frac{1}{x^3}}} \underset{\substack{x \to -\infty \\ x<0}}{=} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}{\cancel{x}\sqrt[3]{4+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}}}$$

$$\xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{1}{2^{2/3}}$$

---

3. $f(x) = \ln^2 x$ $\qquad D_f : x > 0$

jämn/udda : meningslöst ; ej periodisk

2

$f(x) = 0$ omm $x = 1$

$f(x) > 0 \quad \forall x > 0,\ x \neq 1$

($\Rightarrow$ f har globalt minimum i 1)

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ $x = 0$ vertikal asymptot

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln^2 x}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \\ f(x) - 0 \cdot x \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ ingen sned asymptot i ∞

$f'(x) = 2 \ln x \cdot \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0$ omm $x = 1$

$\Rightarrow$ en enda stationär pkt, i $x = 1$

x	0_+		1		∞
f'		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ f har lok. min i $x = 1$

(bekräfter det vi fann tidigare)

$f''(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{x^2} + 2 \ln x \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) =$

$= 2 \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

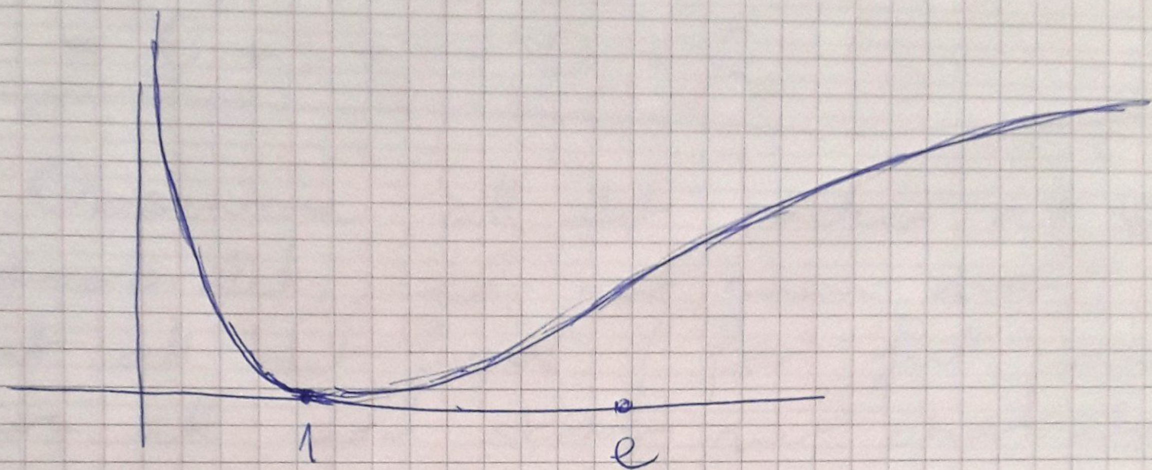
$f''(x) = 0$ omm $x = e$

x	0_+		e		∞
f''		$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ f konvex i $(0, e)$, konkav i (e, ∞)

inflexion i e

x	0_+		1		e		∞
f	$+\infty$	$\searrow$	$\overset{\text{min}}{0}$	$\nearrow$	infl	$\nearrow$	$+\infty$
f'		$-$	0		$+$		
f''		$+$	2	$+$	0	$-$	



---

4. (a) $\int 1 \cdot \arccos^2 x \, dx = x \arccos^2 x -$

$$- \int x \cdot 2\arccos x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \arccos^2 x + \int \arccos x \cdot \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \arccos^2 x - \int \arccos x \cdot \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \arccos^2 x - 2\int \arccos x \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx =$$

$$= x \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x +$$

$$+ 2\int \cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \, dx =$$

$$= x \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x \ (+C)$$

4

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx +$

$\displaystyle + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx = -\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= 0 + 1 + 1 - 0 = 2$

---

5. Observera att det räcker att hitta gränsvärdet, då har man även visat att det finns (för full poäng krävs att man skriver ner observationen)

(a) Det är uppenbart att $0 < a_n < 1$
$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$.

Det räcker alltså att visa att följden är monoton.

$a_{n+1} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) =$

$= a_n \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\in (0,1)} < a_n$

$\Rightarrow$ följden är monotont avtagande nedåt begränsad (av 0)

$\Rightarrow$ konvergent

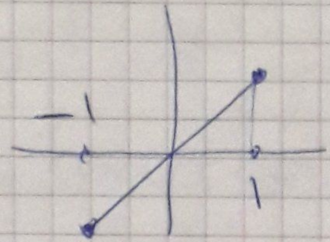
(b) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

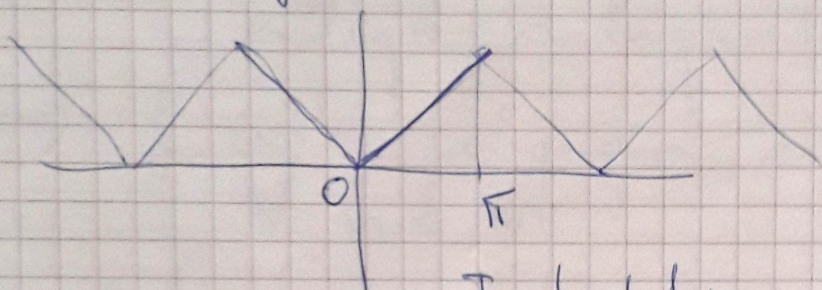
$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{n}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdots\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

6. (a) $f(x) = \cos(\arccos x) = x$

$D_f = [-1, 1]$



$g(x) = \arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi] \\ \text{jämn} \\ 2\pi\text{-periodisk} \end{cases}$



(b) (1) $\underset{\text{Induktionsbevis}}{f_1(x) = \cos(\arccos x) = x}$

polynom av grad 1

(2) Antag att $f_m(x) = \cos(m \arccos x)$ är ett polynom av grad m med koefficient a_{mm} för x^m, för något $m \in \mathbb{N}$

$f_{m+1}(x) = \cos((m+1)\arccos x) =$

$= \cos(m \arccos x + \arccos x) =$

$= \cos(m \arccos x)\cos(\arccos x) -$

$- \sin(m \arccos x)\sin(\arccos x) = \circledast$

$\left(= x f_m(x) - \varepsilon_m \sqrt{1 - \cos^2(m \arccos x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{\substack{\arccos x \in [0,\pi] \\ \sin \geq 0 \text{ i } [0,\pi]}} \right.$

$\varepsilon_m = 1$ eller -1

beroende på m och x

Svårt att hantera! $\Big)$

6

$$f_m'(x) = +\sin(m \arccos x) \cdot \frac{+m}{\sqrt{1-x^2}}$$

enligt antagandet är

$f_m'(x)$ ett polynom av grad $m-1$

$\Rightarrow m \sin(m \arccos x) = f_m'(x)\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ (*) $= x f_m(x) - \frac{1}{m} f_m'(x)(1-x^2)$

$=$ polynom av grad $m+1$,

enligt antagandet

$\Rightarrow f_n(x) =$ polynom av grad n

$\forall n \in \mathbb{N}$,

enligt induktionsprincipen.

Koefficienten för x^{m+1} i $f_{m+1}(x)$:

$$a_{mm} + \frac{1}{\cancel{m}} \cdot \cancel{m} \cdot a_{mm} = 2a_{mm}$$

Induktivt fås att koefficienten för x^n i $f_n(x)$ är 2^n.

<u>Anmärkning</u> Polynomen $f_n(x)$ brukar betecknas med $T_n(x)$. De kallas Tchebyshevpolynom, efter den ryske matematikern Tchebyshev, och har många extremala egenskaper.