

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2017-08-25, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt:

, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} dx; & \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{1 + x^2} dx; & \quad \text{(c)} \int_2^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \\ \text{(d)} \int_0^e \sqrt{x} \ln x dx; & \quad \text{(e)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}; & \quad \text{(f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger $0p$; hela uppgiften ger minst $0p$.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} \quad (3p); \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 3)$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$. (3p)

(b) Beräkna $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. (4p)

5. Visa på två olika sätt att $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, för alla $x \in [-1, 1]$. (5p)

6. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{a}}{2} \right)^n$, där $a > 0$. (6p)

7.(a) Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

(b) Härled derivatan av $\arcsin x$. (2p)

8. Hur många primitiva funktioner kan en given funktion ha i ett givet intervall? Givet en primitiv, hur får man alla övriga? Visa ditt påstående. Bläddra tillbaka i kursen, vilken kedja av satser ligger i grunden för ditt bevis? Ange så många du kan, i rätt logisk ordning (utan bevis). (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande
matematisk analys F / TM

Lösningar 25/8-17

1. (a) konvergent; (b) konvergent;
(c) divergent; (d) konvergent;
(e) konvergent; (f) konvergent.

2. (a)
$$\frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \frac{\ln(x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}))}{\ln(x^{10}(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}))}$$
$$= \frac{\ln x^2 + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x^{10} + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})}$$
$$= \frac{2\ln x + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10\ln x + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})}$$
$$= \frac{2 + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) / \ln x}{10 + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}) / \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 0}{10 + 0} = \frac{1}{5}$$

(b) Sätt $1 - x = t \Rightarrow x = 1 - t$
$$\tan \frac{\pi x}{2} = \tan \frac{\pi(1-t)}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2})} =$$
$$= \frac{\cos \frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}}; \quad x \rightarrow 1 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \frac{1}{0} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi}$$

2

3.

$$D_f: x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 3 \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq \ln 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(\ln växande)
 $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ jämn (räcker att betrakta $[0, \infty)$)
 ej periodisk

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x^2 + 3)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \text{ men } f(x) \xrightarrow{\pm\infty} \infty$$

\Rightarrow inga asymptoter i $\pm\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = 0 \quad \text{för } x = 0$$

$f' < 0$ för $x < 0$; $f' > 0$ för $x > 0$

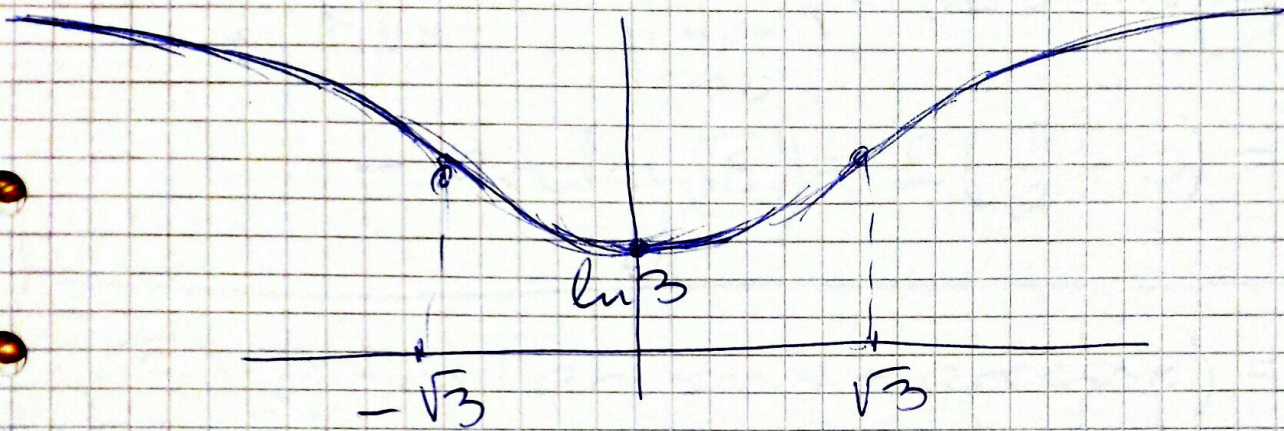
$\Rightarrow f$ har \min (lokalt och globalt) i 0
 (vi hittade det ovan)

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 3) - 4x^2}{(x^2 + 3)^2} = 2 \cdot \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

$f'' = 0$ för $x = \pm\sqrt{3}$; $f'' < 0$ för $|x| > \sqrt{3}$; $f'' > 0$ för $|x| < \sqrt{3}$

$\Rightarrow f$ konvex i $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, konkav annars
 inflexion i $\pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
f	∞				∞			
f'	-	-	0	+	+			
f''	-	-	0	+	+	0	-	-



$$\textcircled{4.} \textcircled{a} \int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan x)^2} =$$

$$= \int \frac{(\tan x)' dx}{(1 + \tan x)^2} = \frac{-1}{1 + \tan x} (+ C)$$

Alternativt: $\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2} = \int \frac{dx}{1 + \sin 2x}$
 sedan standard substitutionen.

$$\textcircled{b} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ p \rightarrow \infty}} \int_{1+\epsilon}^p \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$$

Primitiv funktion: Sätt $t = \sqrt{1+x}$
 $\Rightarrow x = t^2 - 1, dx = 2t dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2t dt}{(1+t^2) \cdot t} =$$

4

$$= 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} (2 \arctan \sqrt{p-1} -$$

$$- \arctan \sqrt{\varepsilon}) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi$$

5. (i) $\sin(\arcsin x + \arccos x) =$

$$= \sin(\arcsin x) \cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x) \sin(\arccos x) =$$

$$= x \cdot x + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} \quad (*)$$

$$= x^2 + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$$

(*) : både $\sqrt{\quad}$ med +, eftersom
 $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, där $\cos \geq 0$
 $\arccos x \in [0, \pi]$, där $\sin \geq 0$

$$\arcsin x + \arccos x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

\sin är endast $= 1$ för vinkel $\frac{\pi}{2}$ i det intervallet

$$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

(ii) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

$$f'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [-1, 1] \Rightarrow f \equiv C \quad ; \quad [-1, 1]$$

$$f(0) = 0 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{6.} \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \right)^n = e^{n \ln \frac{1 + \sqrt{a}}{2}}$$

$$= e^{n \ln \left(1 - \frac{1 - \sqrt{a}}{2} \right)}$$

$$= e^{n \frac{\ln \left(1 - \frac{1 - \sqrt{a}}{2} \right)}{-\frac{1 - \sqrt{a}}{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{a}}{2}}$$

standardlim

$$\frac{n \frac{1 + \sqrt{a}}{2}}{2} = \frac{1}{2} n \left(e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1}{\frac{1}{n} \ln a} \cdot \ln a \rightarrow \frac{1}{2} \ln a$$

standardlim

⇒ det sökta gränsvärdet är

$$e^{\frac{1}{2} \ln a} = e^{\ln \sqrt{a}} = \underline{\underline{\sqrt{a}}}$$

8. se lösningen till tidigare tenta, augusti 2016