TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2016-12-22, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531, svarar på frågor i telefon.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)}\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx; \quad \textbf{(b)}\ \int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx; \quad \textbf{(c)}\ \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx;$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, det vill säga sant / falskt.

(d) Om f är deriverbar i (a,∞), och $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$, så gäller att $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
(e) Om f är deriverbar i (a,∞), och $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, så gäller att $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$.
(f) Om f är två gånger deriverbar i (a,∞), och $\lim_{x\to\infty} f''(x)=\infty$, så gäller att $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{\sin^2 x} \quad (3p); \qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3+x^2+1}\right) \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2-x^2}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x}$. (3p)

5. Skissa grafen till funktionen f i intervallet (a,b), eller tala om att det inte finns någon sådan funktion, där f uppfyller följande i hela intervallet:
(a) $f>0,\ f'>0,\ f''<0$; **(b)** $f>0,\ f'<0,\ f''>0$;
(c) $f<0,\ f'>0,\ f''>0$; **(d)** $f>0,\ f'<0,\ f''<0$.
Lös därefter samma uppgift för intervallet (a,∞). (8p)

6. Givet är funktionen $f(x)=x^n+px+q$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$. Bestäm (som funktion av n) det största antalet olika reella nollställen f kan ha för reella parametervärden p och q. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

8.(a) Formulera och bevisa satsen om partiell integration för primitiva funktioner. (4p)

(b) Ge exempel på fyra olika typer av funktioner, vilkas primitiva hittas med hjälp av partiell integration. (2p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F / TM

Lösningar 22/12-16

(1.) (a) divergent; (b) divergent;
(c) divergent; (d) sant;
(e) falskt; (f) sant.

(2.) (a)
$$\frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} + \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} + \frac{\cancel{1-\cos^2 x}^{\,1}}{\cancel{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 + \frac{1}{2},$$
då $\sin^2 x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

(b) $\sqrt{x^3 - x^2 + 1} - \sqrt{x^3 + x^2 + 1} =$
$$= \frac{\cancel{x^3} - x^2 + \cancel{1} - \cancel{x^3} - x^2 - \cancel{1}}{\sqrt{x^3-x^2+1} + \sqrt{x^3+x^2+1}} = \frac{-2x^2}{|x|^{3/2}\left(\sqrt{1-\frac{x^2-1}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{x^2+1}{x^3}}\right)}$$
$$\overset{x\to\infty}{=} \frac{-2x^{1/2}}{\cancel{x^{3/2}}\left(\sqrt{1-\underbrace{\frac{x^2-1}{x^3}}_{\to 0}} + \sqrt{1+\underbrace{\frac{x^2+1}{x^3}}_{\to 0}}\right)} \to \text{"}\frac{-2\cdot\infty}{2}\text{"} =$$
$$= -\infty$$

(3.) $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ $\quad D_f:\ x^3 \geq -1$
$\iff x \geq -1$

Nollställe: $x^3 + 1 = 0 \iff x = -1$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow$ min i 0

$\boxed{2}$

$D_f = [-1, \infty)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Inga vertikala asymptoter

Sned?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} = \frac{x^{\cancel{3/2}\,1/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{\cancel{x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\Rightarrow$ ingen sned asymptot i ∞

Inga symmetrier

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}} \cdot 3x^2, \text{ def. i } (-1, \infty)$$

$f' = 0$ endast i $x_0 = 0 \in (-1, \infty)$

x	-1		0	
f'		$+$	0	$+$

tecknet samma före och efter 0

$\Rightarrow$ inget lokalt extremum i 0

~~terasspkt~~

f växande i hela D_f

$\lim_{x\to -1} f' = \infty$

$\Rightarrow$ vertikal tangent till f:s graf i $(-1, 0)$

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{x^3+1} - x^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4x(x^3+1) - 3x^4}{2\left(\sqrt{x^3+1}\right)^3} = \frac{3}{2}\,\frac{x(x^3+4)}{2(x^3+1)^{3/2}}$$

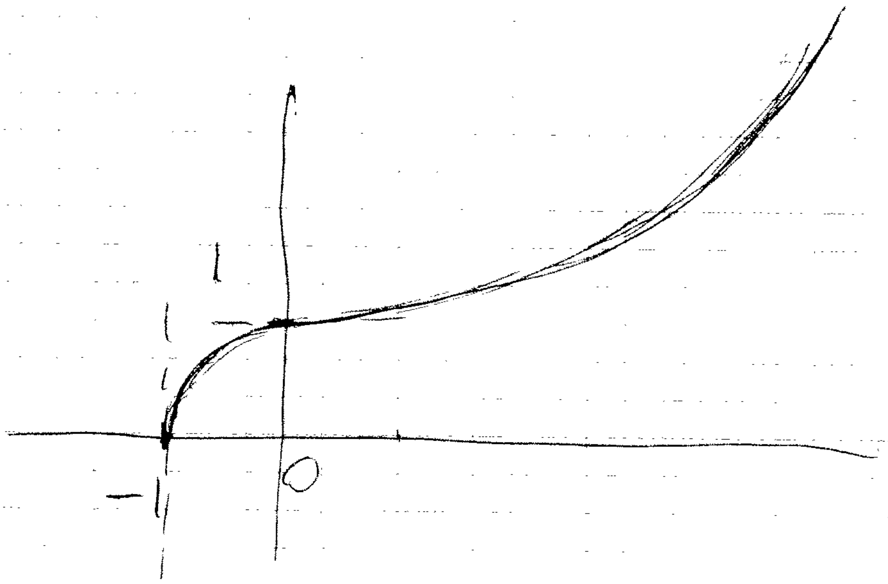
$x^3+4>0$ i D_f

$\Rightarrow f''=0$ endast i $x_0=0$

x	-1		0	
f''		$-$	0	$+$

Inflexion för $x=0$ (vilket vi visste)

x	-1		0		$+\infty$
f	0 min	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	



4. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}} =$

$x>0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}}} = \begin{bmatrix} t=\frac{1}{x} \\ dt=-\frac{1}{x^2}dx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1/2}\right|+C$$

eller (ty $t>0$?

(4)

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}} \right) + C$

$x < 0$: $\sqrt{x^2} = -x$, f.ö. samma

Alternativt (standardlösning):

$x = \sqrt{2} \sin s \qquad dx = \sqrt{2} \cos s \, ds$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos s}{\sin s \sqrt{2} \, |\cos s|} ds$$

$\cos s > 0$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{ds}{\sin s}$

löses t.ex. med standard-substitutionen

$\cos s < 0$: motsvarande, med $-$

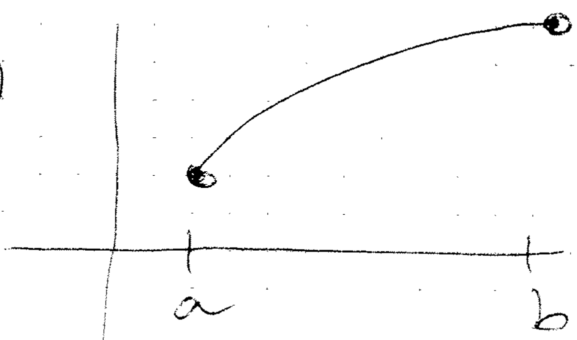
---

(4)(b) $$\int_0^1 x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x \left(e^{-3x}\right)' dx =$$

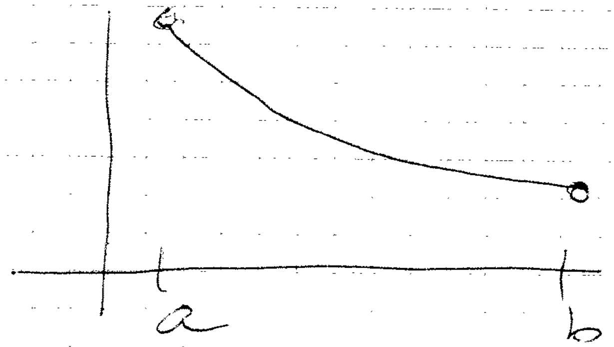
$$\overset{\text{p.i.}}{=} \left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 1 \cdot e^{-3x} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3} - \frac{1}{9} \left[e^{-3x} \right]_0^1 = -\frac{4}{9} e^{-3} + \frac{1}{9}$$

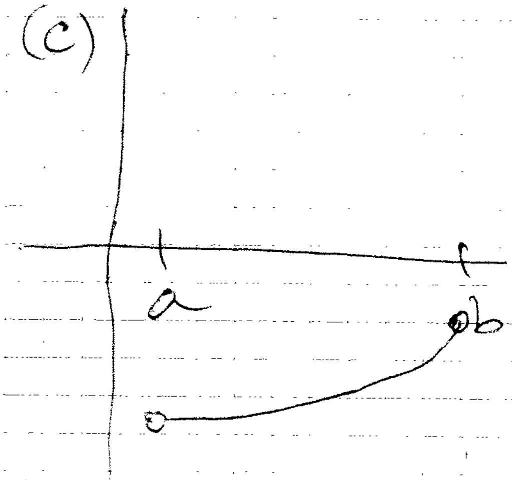
(5.) (a,b) : (a)



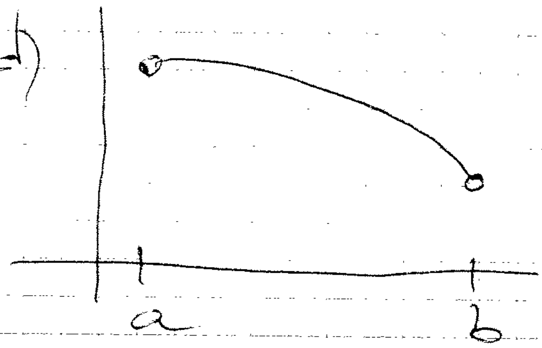
(b)



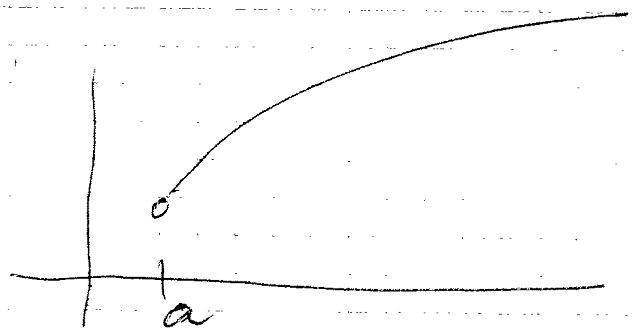
(c)



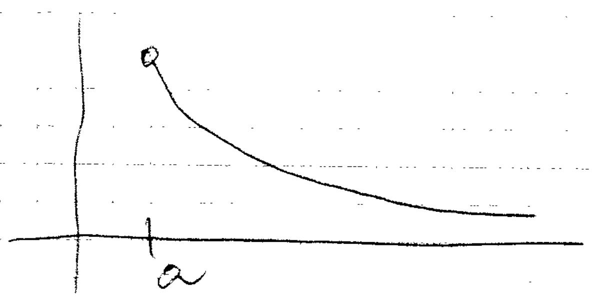
(d)



(a, ∞): (a)



(b)



(c) & (d) omöjliga

---

6. $n = 1$: ett reellt nollställe för $p \neq -1$; inget om $p = -1$

$n \geq 2$: f' måste ha ett nollställe mellan två nollställen för f

$f'(x) = (n \cancel{-1}) x^{n-1} + p = n x^{n-1} + p$

har ett nollställe för n jämnt och max två för n udda

$\Rightarrow$ f har max ~~två~~ två för n jämnt, max tre för n udda