

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2016-10-27, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Håkon Strand Bölviken, ankn. 5325, besöker salen ca 9:30 och 11:30.

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^6+9}} dx; \quad (b) \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx; \quad (c) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(d) Om f är deriverbar i (a, b) , så är f kontinuerlig i (a, b) .

(e) Om f är kontinuerlig i (a, b) , så är f deriverbar i (a, b) .

(f) Om f är deriverbar i (a, b) , så är f' kontinuerlig i (a, b) .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger $0p$; hela uppgiften ger minst $0p$.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} \quad (3p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{x+1}{(x^2-2x+4)(x^2+6x+9)}$. (Det räcker att du härleder ett ekvationssystem för koefficienterna, utan att lösa det.) (3p)

(b) Beräkna $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$. (3p)

5. Bestäm alla reella x sådana att $\arccos \sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$. (6p)

6. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras som

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ för } x \neq 0; \quad f(0) = 1.$$

(a) Visa att f är deriverbar i $x_0 = 0$. (4p)

(b) Visa att $f'(x)$ är kontinuerlig i $x_0 = 0$. (4p)

(OBS! L'Hospitals regel och McLaurin/Taylorutvecklingar får ej användas. När man visar (b) kan man använda påståendet i (a), även om man inte visat det.)

7. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA 970 Inledande
matematisk analys F1/TM1
Lösningar 27/10-16

1. (a) divergent; (b) konvergent;
 (c) konvergent; (d) sant;
 (e) falskt; (f) falskt.

2. (a) $\frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \frac{\ln (2 \sin x \cos x)}{\ln \sin x} =$
 $= \frac{\ln 2 + \ln \sin x + \ln \cos x}{\ln \sin x} =$

$= \frac{\ln 2 + \ln \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0}{\ln \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty} \rightarrow 1$

(b) $\frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1} =$

$= \frac{x \sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} - |x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x-1} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow x < 0 \\ |x| = -x \end{array} \right]$

$= \frac{x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1+1}{1} = 2$

3.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

2

$$D_f : x > 1$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$f(x) - 0 \cdot x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{šneđ} \\ \text{asymptot i } \infty \end{array} \right\}$$

$x=1$ vertikal asymptot

mga symmetrier

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot x}{x-1} =$$

$$= \frac{2(x-1) - x}{2(x-1)^{3/2}} = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}$$

x	1	2	∞
f'	-	0	+

$\Rightarrow f$ her lok. min i $x_0=2$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)^{3/2} - 2 \cdot \frac{3}{2} (x-1)^{1/2} \cdot (x-2)}{2(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x-2-3x+6}{2(x-1)^{5/2}} = \frac{-x+4}{2(x-1)^{5/2}}$$

x	1	4	∞
f''	+	0	-

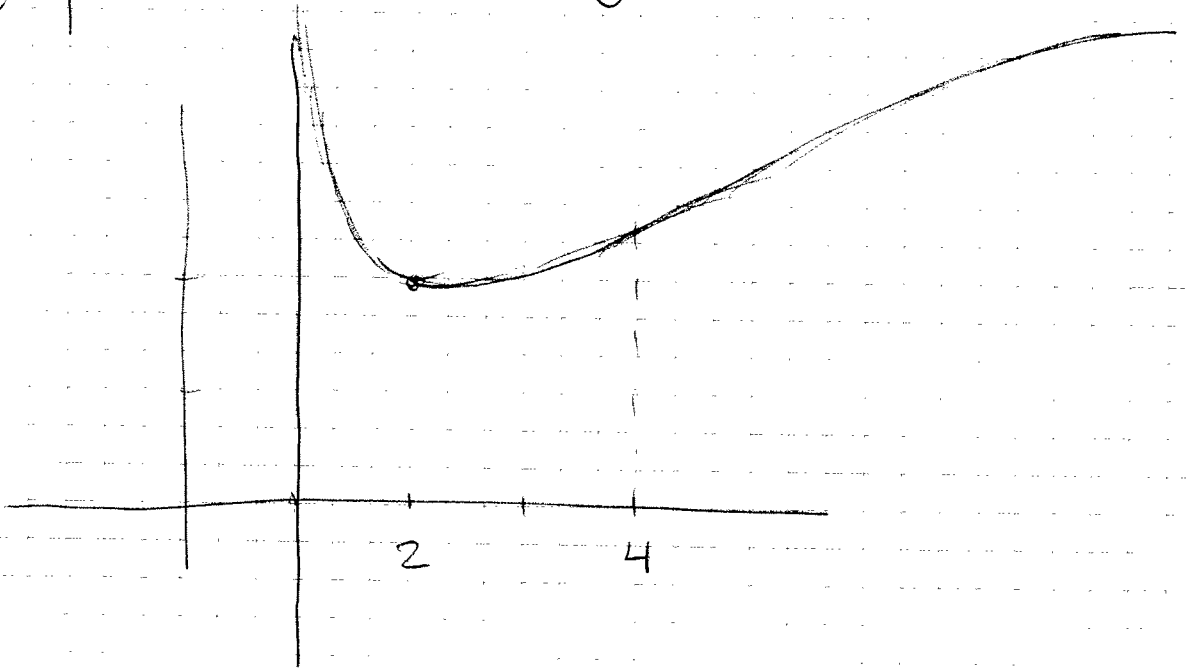
3

$\Rightarrow f$ konvex i $(1, 4)$

konkav i $(4, \infty)$

f har inflexionspunkt for $x=4$

x	1	2	4	∞
f	$+\infty$	lok. min 2		$+\infty$
f'	-	0	+	+
f''	+	+	0	-



4. (a) $\frac{x+1}{(x^2-2x+4)(x+3)^2} =$

$$= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4} \quad | \quad Q(x)$$

$$x+1 = A(x+3)(x^2-2x+4) + B(x^2-2x+4) + (Cx+D)(x+3)^2$$

$$x = -3 : -2 = 19B \Rightarrow B = -\frac{2}{19} \quad \triangle 4$$

$$x^3 : 0 = A + C \rightarrow A = -C$$

$$(x=0) : 1 = 12A + 4B + 9D$$

$$x^2 : 0 = A - 2B + 6C + D =$$

$$= -2B + 5C + D =$$

$$= -5A - 2B + D$$

$$\begin{array}{l} + \rightarrow \\ (-9) \cdot \end{array} \left| \begin{array}{l} 12A + 9D = 1 + \frac{8}{19} = \frac{27}{19} \\ -5A + D = 2B = -\frac{4}{19} \end{array} \right.$$

$$57A = \frac{36 + 27}{19} = \frac{63}{19}$$

$$19A = \frac{21}{19}$$

$$A = -C = \frac{21}{361}$$

$$D = 5A - \frac{4}{19} = \frac{105 - 76}{361} = \frac{29}{361}$$

$$(i) \int \frac{A}{x+3} = A \ln|x+3| \quad (\text{vi väljer alla konstanter} = 0)$$

$$(ii) \int \frac{B}{(x+3)^2} = -B \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$(iii) \int \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 4} dx = \int \frac{C(x-1) + (C+D)}{(x-1)^2 + 3} =$$

$$= \frac{C}{2} \ln(x^2 - 2x + 4) + (C+D) \cdot \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{C}{2} \ln(x^2 - 2x + 4) + (C+D) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}}$$

Återstår - att lägga ihop resultaten från (i), (ii), (iii)!

$$\begin{aligned}
 (b) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ x=1: t=1; x=2: t=\sqrt[6]{2} \end{array} \right] \quad \text{⑤} \\
 &= \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{6t^3}{t^2 + t} dt = 6 \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{(t^3 + 1) - 1}{t + 1} dt = \\
 &= 6 \int_1^{\sqrt[6]{2}} \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\
 &= \left[2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln(t+1) \right]_1^{\sqrt[6]{2}} = \\
 &= 2\sqrt[6]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[6]{2} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{2}) - \\
 &\quad - \underbrace{2 + 3 - 6 + 6 \ln 2}_{=-5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{⑤. } \cos \text{ v.l.} &= \sqrt{1-x^2} = \left[\text{Df: } |x| \leq 1 \right] \\
 &= \cos \text{ h.l.} = \cos(-\arcsin x) = \\
 &\xrightarrow{\text{ty } \rightarrow} \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \\
 &\quad \text{cos jämn} \qquad \text{ty } \arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{cos} \geq 0 \text{ i } \frac{\pi}{2} \\
 \text{v.l.} &\in [0, \pi] \qquad \text{h.l.} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]
 \end{aligned}$$

För att de ska ligga i samma intervall ska båda ligga i $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-x^2} &\geq 0 \\
 \Rightarrow \arccos \sqrt{1-x^2} &\geq 0 \text{ (alltid)} \\
 \text{---} &\leq \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\arcsin x &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
 \Leftrightarrow \arcsin x &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 0} &\leftarrow \text{Svar}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \textcircled{2} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - 1}{x} \quad \triangle$$

$$x > 0: \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow \cos x - 1 < \frac{\sin x}{x} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 0$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = - \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \cdot x$$

$\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$ 0

$$\Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

enligt utslängningsregeln

$\Rightarrow f$ har högerderivat 0 i 0

$x < 0$: differenskvoten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - x}{x^2} \quad \text{är en udda funktion}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} = 0$$

$$\Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

$$(b) \quad x \neq 0 : f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad (7)$$

$$? \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$$

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - x + x - \sin x}{x^2}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{x} - \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$

0 0

ent. (a)
