TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2016-08-22, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Olof Giselsson, ankn. 5325, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}; \qquad \textbf{(b)} \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx; \qquad \textbf{(c)} \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx;$$

$$\textbf{(d)} \int_{0}^{1} x \ln x \, dx; \qquad \textbf{(e)} \int_{1}^{2} \frac{dx}{\ln x}; \qquad \textbf{(f)} \int_{0}^{1} \frac{dx}{\ln(1+x)}.$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) \quad \text{(3p)}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \quad \text{(3p)}.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x + \sin x$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx$. (3p)

5. Punkten P ligger på hyperbeln med ekvation $y = \dfrac{a}{x}$, $a \neq 0$. Tangenten till hyperbeln i P skär x- och y-axlarna i punkterna A och B, respektive. Visa att P är mittpunkten på sträckan AB. (6p)

6. Visa att funktionen $f(x) = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, är monotont växande eller monotont avtagande i varje intervall i sin definitionsmängd. (6p)

7.(a) Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

(b) Härled derivatan av $\arctan x$. (2p)

8. Hur många primitiva funktioner kan en given funktion ha i ett givet intervall? Givet en primitiv, hur får man alla övriga? Visa ditt påstående. Bläddra tillbaka i kursen, vilken kedja av satser ligger i grunden för ditt bevis? Ange så många du kan, i rätt logisk ordning (utan bevis). (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1 / TM1

Lösningar 22/8 - 2016

1. (a) divergent; (b) divergent; (c) konvergent; (d) konvergent; (e) divergent; (f) divergent.

---

2. (a) $\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} = \dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}$

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} =$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}-2}{n+2}\right) = -\frac{n}{2(n+2)} =$$

$$= \left(-1+\frac{2}{n+2}\right)\Big/2 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1/2$$

(b) $\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}\,\dfrac{x^{3/2}-1}{\sqrt{x}-1} =$

$$= \sqrt{x}\,\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}\,\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}\left((\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}$$

$$\xrightarrow[x\to 1]{} 3$$

---

3. $f(x) = x + \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = -f(x)$ f udda

ej periodisk (räcker att betrakta $x \geq 0$)

Nollställen: $x=0$

För $x>0$ gäller $|\sin x|<x$, så det finns inga fler nollställen.

Inga vertikala asymptoter.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Sneda asymptoter?

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+\sin x}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$

$f(x) - 1\cdot x = \sin x$ har inget gränsvärde i $\pm\infty$ $\Rightarrow$ inga asymptoter finns i $\pm\infty$

$f'(x) = 1+\cos x \geq 0$

$\Rightarrow$ f växande i $\mathbb{R}$

$f'(x)=0$: $\cos x = -1$ $x = (2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

(vi tittar bara på $x\geq 0$)

f' byter ej tecken i sina nollställen

$\Rightarrow$ $\nexists$ lokala extrema

$f''(x) = -\sin x$ $f''(x)=0$ i $x=k\pi$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

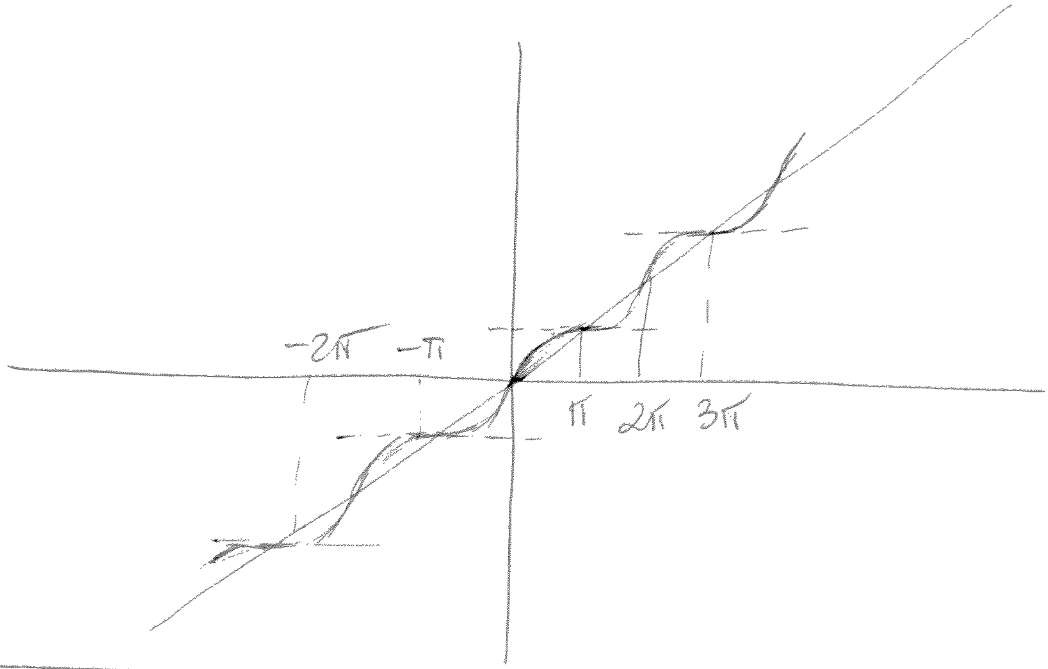
f'' byter tecken i $x=k\pi$

$\Rightarrow$ inflexion i $x=k\pi$

(grafen skär linjen $y=x$ i $(k\pi, k\pi)$)

För $x<0$: symmetri m.a.p. origo

$$f'(k\pi) = \begin{cases} 0 & k \text{ udda} \\ 2 & k \text{ jämnt} \end{cases}$$



4. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x+9\sin^2 x} =$

$$= \int \frac{1}{1+(3\tan x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(3\tan x)^2}\cdot(3\tan x)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\arctan(3\tan x) \qquad (+C)$$

Alternativt: standardsubstitutionen, eller först omskrivning till

$$\frac{1}{4-3\frac{1+\cos 2x}{2}+5\frac{1-\cos 2x}{2}}$$, och sedan

standardsubstitutionen (ger enklare integral, lägre gradtal i den rationella funktionens nämnare)

(b) $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l|ll} \sqrt{x}=t & x=0 & x=1 \\ dx = 2t\,dt & t=0 & t=1 \end{array}\right]$ (4)

$= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t\,dt = \left[\begin{array}{l} 1+t=s\ ;\ ds=dt \\ t=0 \leadsto s=1 \ldots \end{array}\right] =$

$= \int_1^2 \frac{2(s-1)^3}{s}\,ds = 2\int_1^2 \left(s^2-3s+3-\frac{1}{s}\right)ds$

$= 2\left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2 + 3s - \ln s\right]_1^2 =$

$= 2\left(\left(\frac{8}{3} - \cancel{6} + \cancel{6} - \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - 0\right)\right) =$

$= 2\left(+\frac{5}{6} - \ln 2\right) = \frac{5}{3} - 2\ln 2$

---

5. $P\left(x_0, \frac{a}{x_0}\right)$, $x_0 \neq 0$

Tangentens ekvation i P:

$y - \frac{a}{x_0} = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0)$

A: $y=0$ fås för $x = 2x_0$

$\Rightarrow A(2x_0, 0)$

B: $x=0$ ger $y = 2\cdot\frac{a}{x_0}$

$\Rightarrow B\left(0, 2\cdot\frac{a}{x_0}\right)$

Mittpunkten på AB har då koordinater

$\left(\frac{2x_0+0}{2}, \frac{0+2\cdot\frac{a}{x_0}}{2}\right) = \left(x_0, \frac{a}{x_0}\right)$

$\Rightarrow P$ mittpunkt på AB

6. $f(x)$ är definierad i intervallen mellan nollställena till $\sin(x+b)$.

$$f'(x) = \frac{\cos(x+a)\sin(x+b) - \cos(x+b)\sin(x+a)}{(\sin(x+b))^2}$$

$$= \frac{\sin(\cancel{x}+b-\cancel{x}-a)}{\sin^2(x+b)} = \frac{\sin(b-a)}{\sin^2(x+b)},$$

som är antingen identiskt $= 0$ (för $a=b$), eller har konstant tecken i varje intervall i D_f (tecknet beror på storleksförhållandet mellan a och b).

$\Rightarrow$ f monoton i varje delintervall i D_f

(OBS! $f' \equiv 0$ ger samma resultat; för $a=b$ har vi $f \equiv 1$, som är både monotont växande och monotont avtagande)