TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2016-01-07, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}; \qquad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}; \qquad \textbf{(c)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^4}}\,.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.
(d) Om en följd är begränsad, så är den konvergent.
(e) Om en följd är konvergent, så är den nedåt begränsad.
(f) Om en följd är konvergent, så är den uppåt begränsad.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} \quad \text{(3p)}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x} \quad \text{(3p)}.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\, dx\,.$ (3p)

5. Bestäm för vilka parametervärden integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha |x-1|^\beta}$$

konvergerar. Motivera! (6p)

6. Funktionen $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[a,\infty)$. Om f har ett ändligt gränsvärde när x går mot ∞, visa att f är begränsad i intervallet $[a,\infty)$. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om eventuella rationella nollställen till polynom. (6p)

8. Formulera och bevisa kedjeregeln för derivering av sammansatt funktion. (6p)
Ange derivatan av funktionen $f(x) = \sin\sqrt{x^2+1}$. (2p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1/TM1

Lösningar 7/1-2016

1. (a) divergent; (b) konvergent; (c) konvergent; (d) falskt; (e) sant; (f) sant.

---

2. (a) $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} =$
$(x>0)$

$$= \sqrt{1+\underbrace{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\sqrt{x}}}_{\to 0}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

(b) $\ln \cos ax = \ln(1+(\cos ax - 1)) =$

$$= \frac{\ln(1+(\cos ax-1))}{\cos ax - 1}(\cos ax - 1)$$

$$\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x} = \frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{\cos 3x - 1} \cdot \frac{\cos 2x - 1}{\ln(1+(\cos 2x - 1))} \cdot$$

$$\cdot \frac{\cos 3x - 1}{\cos 2x - 1} =$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{\cos 3x - 1}}_{\substack{x\to 0 \\ \to 1}} \cdot \underbrace{\frac{\cos 2x - 1}{\ln(1+(\cos 2x-1))}}_{\substack{x\to 0 \\ \to 1}} \cdot \frac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x} \to \, ?$$

ty $\cos 3x - 1 \to 0$
$\cos 2x - 1 \to 0$

$$\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x} = \frac{1-\cos^2 3x}{1-\cos^2 2x}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 3x} =$$

$$= \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\cdot\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\cdot\frac{9\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 3x}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot 1\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{9}{4}$$

---

3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$ $\quad D_f: x \neq 0$

Nollställen: ± 1

$f>0$ för $\begin{cases}|x|>1\\ x>0\end{cases}$; $f<0$ för $\begin{cases}|x|<1\\ x>0\end{cases}$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ udda

ej periodisk

Räcker att titta på $x>0$.

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \dfrac{"-1"}{+0} = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $x=0$ vertikal asymptot

$y=0$ horisontell asymptot i $\pm\infty$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x^{\cancel{3}} - 3\cancel{x^2}(x^2-1)}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{3-x^2}{x^4}$$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f'	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$

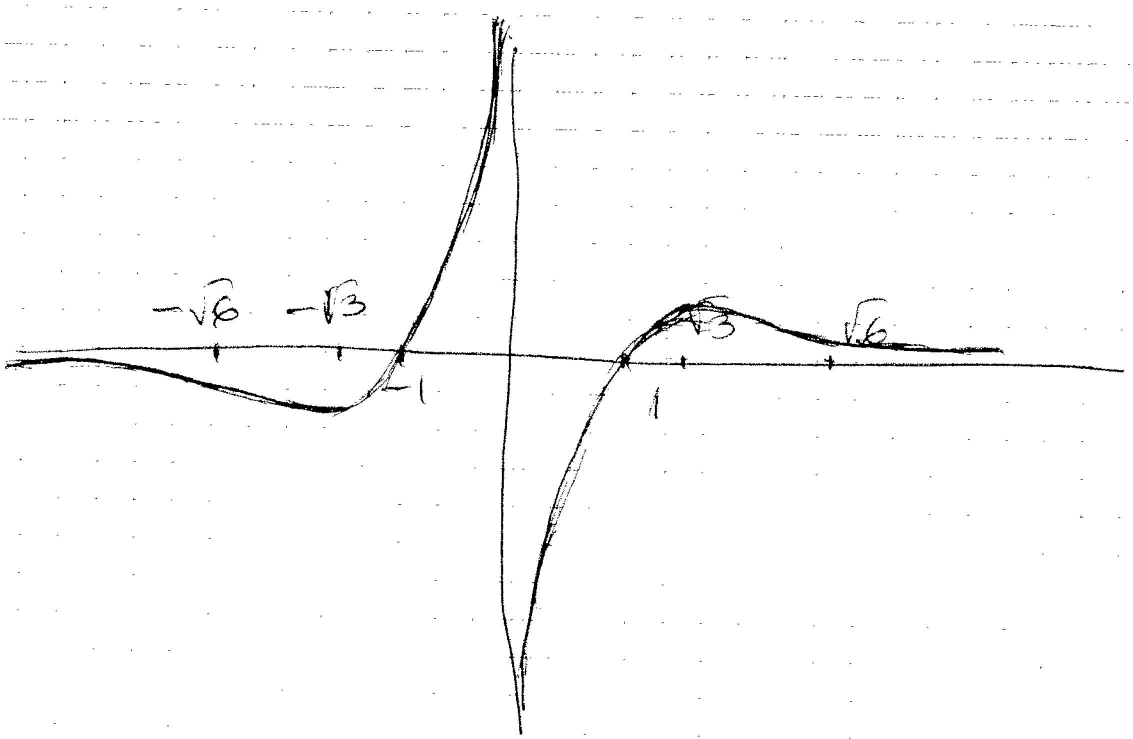
$\Rightarrow f$ har lok. max i $\sqrt{3}$
(och lok. min i $-\sqrt{3}$)

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot x^{\cancel{4}} - 4\cancel{x^3}(3-x^2)}{x^{\cancel{8}\,5}} = \frac{2x^2-12}{x^5}$$

x		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
f''	$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ inflexion för $x=\sqrt{6}$ (och $x=-\sqrt{6}$)
f konvex i $(-\sqrt{6}, 0)$ & i $(\sqrt{6}, \infty)$
konkav i $(-\infty, -\sqrt{6})$ och i $(0, \sqrt{6})$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
f	$\to 0$	infl.	lok. min	0	$+\infty$ | $-\infty$	0	lok. max	infl.	$\to 0$
f'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
f''	$-$	0		$+$	|	$-$		0	$+$



4. (a) f rationell funktion

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) +$$
$$+ (Cx+D)(x-1)^2$$

$x = 1$: $1 = 5B \Rightarrow B = 1/5$

x^3 : $0 = A + C \Rightarrow C = -A$

x^0 : $0 = -2A + 2B + D$

x^2 : $0 = A + B - 2C + D$

$$-2A + \frac{2}{5} + D = 0$$
$$3A + \frac{1}{5} + D = 0$$

$$5A - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{25}, \quad C = -\frac{1}{25}$$
$$D = -\frac{8}{25}$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \quad (+C)$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} \quad (+C)$$

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{C(x+1)+D-C}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{((x+1)^2+1)'}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) \quad (+C)$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1) \quad (+C)$$

alternativ att plocka ihop

$\boxed{3}$

(b) $\int_0^1 \arccos x \, dx =$

$= \left[x \arccos x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{-\sqrt{1-x^2}} \, dx =$

$= 1 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$

$= 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 =$

$= -0 + 1 = \underline{\underline{1}}$

---

5. Vi behöver titta på konvergens/divergens i 0, 1 och ∞.

$x_0 = 0$: $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |x-1|^\beta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |x-1|^\beta}$

$|x-1|^\beta \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < |x-1|^\beta < \frac{3}{2}$ för tillräckligt små $\underline{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{2x^\alpha} < \frac{1}{x^\alpha |x-1|^\beta} < \frac{3}{2x^\alpha}$ för små $\underline{x}$

$\Rightarrow$ (i) för $\alpha < 1$ $(0 <) \frac{1}{x^\alpha |x-1|^\beta} < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^\alpha}$

$\Rightarrow$ konvergens

(ii) för $\alpha \geq 1$ $\frac{1}{x^\alpha |x-1|^\beta} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \; (>0)$

$\Rightarrow$ divergens

$\Rightarrow$ integralen konvergent i 0 omm $\alpha < 1$.

$x_1 = 1$: exakt samma förfarande, ⑥
fast man jämför med
$\frac{1}{(1-x)^\beta}$ i $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
och med $\frac{1}{(x-1)^\beta}$ i $(1, 2)$

konvergens omm $\beta < 1$

∞ : $\frac{1}{x^\alpha |x-1|^\beta} = \frac{1}{x^\alpha (x-1)^\beta} =$

$= \frac{1}{x^{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^\beta}$, $\left(1-\frac{1}{x}\right)^\beta \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+\beta}} < \frac{1}{x^{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^\beta} < \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$

för tillräckligt stora x

$\Rightarrow$ resonemang som ovan ger
att konvergens i ∞ uppträder
omm $\alpha+\beta > 1$

$\Rightarrow$ integralen konvergent omm $\left|\begin{array}{l}\alpha < 1\\ \beta < 1\\ \alpha+\beta > 1\end{array}\right.$

---

⑥ $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists A : \forall x > A \quad l-1 < f(x) < l+1$

f kontinuerlig i $[a, A] \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$:
(Weierstraß) $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in [a, A]$

$\Rightarrow |f(x)| \leq C + |l-1| + |l+1|$ (7)

$\forall x \in [a, \infty)$

(8.) $\left(\sin\sqrt{x^2+1}\right)' = \cos\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$,

enligt kedjeregeln
