TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2015-10-29, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}; \qquad \textbf{(c)} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2}dx\,.$$

Funktionerna $f, g : [a,\infty) \to [0,\infty)$ är kontinuerliga. Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,\infty)$, och $\int_a^{\infty} g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

(e) Om det finns $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, och $\int_a^{\infty} g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

(f) Om det finns $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0,\infty)$, och $\int_a^{\infty} g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad \text{(3p)}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+6x}-5}{\sqrt{x}-2} \quad \text{(3p)}.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-2}}$. (3p)

(b) Beräkna arean av det begränsade området som avgränsas av parabeln $y = 2x - x^2$ och den räta linjen $x + y = 0$. (3p)

5. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arcsin(\cos x)$, utan att använda derivator. (6p)

6. Visa att följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, är avtagande och nedåt begränsad. Vad är dess gränsvärde? (6p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p) Varför är satsens påstående sant även för integraler $\int_b^a f$, där $b > a$? (1p)

8.(a) Använd satsen om variabelsubstitution i Riemannintegralen för att bevisa påståendena:

Om funktionen f är kontinuerlig och jämn på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{(3p)}$$

Om funktionen f är kontinuerlig och udda på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad \text{(3p)}$$

(b) Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{117} x \cos^{218} x\, dx. \qquad \text{(1p)}$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1/TM1

Lösningar 29/10-2015

1. (a) konvergent ; (b) konvergent ;
(c) konvergent ; (d) sant ;
(e) sant ; (f) sant.

---

2. (a) $$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \cdot \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(b) $$\frac{\sqrt{1+6x} - 5}{\sqrt{x} - 2} = \frac{1+6x-25}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+6x}+5}$$

$$= \frac{6\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+6x}+5} \xrightarrow[x\to 2^2]{} 6 \cdot \frac{2+2}{\sqrt{25}+5} = \frac{12}{5}$$

---

3. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x > 0 \quad \forall\, x \in D_f$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \text{"}+0 \cdot e^{-\infty}\text{"} = +0$$

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{1/x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = \infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ är vertikal asymptot

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = "+\infty \cdot e^{0}" = \infty$

$\frac{f(x)}{x} = xe^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$

$\Rightarrow$ $\nexists$ sneda asymptoter

f ej jämn/udda ; ej periodisk

$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} + \cancel{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) =$

$= e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x		0		$\frac{1}{2}$	
f'	$-$		$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ f har lok. min i $\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{2}$ (knappt 2)

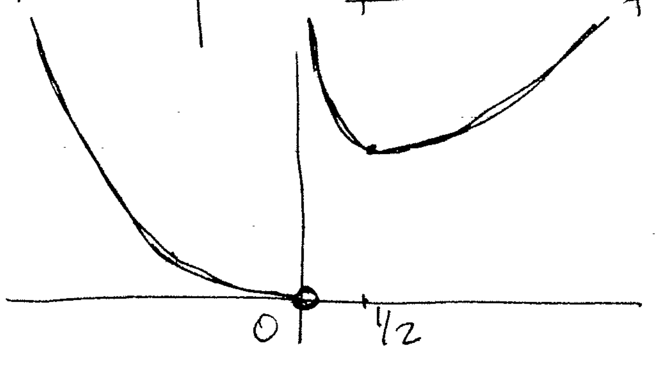
$y=0$ "tangent" i origo från vänster

(origo $\notin$ grafen)

$f''(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{2x^2-2x+1}{x^2} > 0$ i D_f

$\Rightarrow$ f konvex i $(-\infty,0)$ och i $(0,\infty)$

x		0		$\frac{1}{2}$	
f	$+\infty$ ↘	$+0$ | $+\infty$	↘	lok. min	↗ $+\infty$
f'	$-$	$+0$	$-$	0	$+$
f''	$+$		$+$		$+$



4. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-2}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-2 = t^2 \\ x = (t^2+2)^2 \\ dx = 2(t^2+2)\cdot 2t\,dt \end{array}\right]$ 3

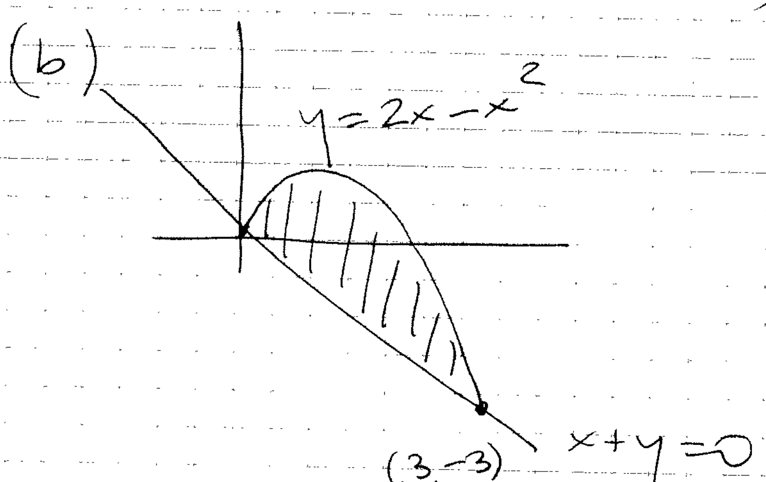
$$= \int \frac{4t^3+8t}{t}\,dt = 4\int (t^2+2)\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 + 8t + C = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\sqrt{x}-2}\right)^3 +$$

$$+ 8\sqrt{\sqrt{x}-2} + C$$

(Alternativt: $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{u-2} = v \ldots$)

(b)



$$2x - x^2 = -x \iff x^2 - 3x = 0$$

$$\iff x(x-3) = 0 \iff \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{eller} \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ skärningspunkter $(0,0)$ och $(3,-3)$

$2x - x^2 > -x$ i $(0,3)$

$$\text{Arean} = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))\,dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

5. $f(x)=\arcsin(\cos x)$; $D_f=\mathbb{R}$

$\cos x$ jämn, 2π-periodisk

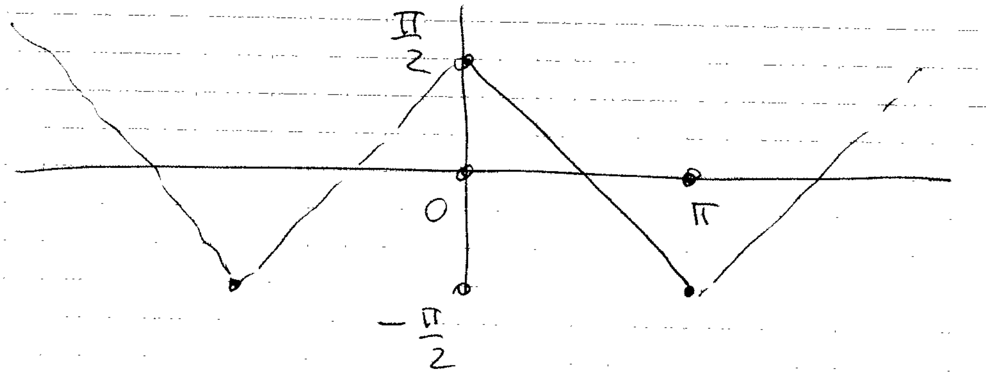
$\Rightarrow$ $f(x)$ jämn, 2π-periodisk

$\Rightarrow$ räcker att rita grafen i $[0,\pi]$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{\pi}{2}-x$$

för $\frac{\pi}{2}-x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x\in[0,\pi]$



etc

---

6. $a_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\{a_n\}_1^\infty$ växande $\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$

avtagande $\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ —"—

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n(n+2)}}_{=x>-1}\Big)^{n+1} \overset{\text{Bernoullis olikhet}}{\geq} \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) =$$

5

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n^2+2n+n+1}{n(n+2)} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+n+n^2+3n+1}{n(n+2)^2} =$$

$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ följden avtagande

$$\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e = e$$