TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2015-08-24, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Timo Hirscher, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{2-x}}{2x^2+1}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{e^{\frac{1}{x}}}; \qquad \textbf{(c)} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om funktionen f är deriverbar i $[a,\infty)$, och f' har ett ändligt gränsvärde när $x \to \infty$, så har f asymptot i ∞.

(e) Om funktionen f är deriverbar i $[a,\infty)$, och f har asymptot i ∞, så har f' ett ändligt gränsvärde när $x \to \infty$.

(f) Om funktionen f har asymptoten $y = -x$ när $x \to \infty$, sä gäller att $f(x) \to -\infty$ när $x \to \infty$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \quad (3\text{p}); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \quad (3\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{7-5x^2}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} \sin 2x\,dx\,.$ (3p)

5. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ inte har ändlig derivata i punkten $x_0 = 1$. (6p)

6. Visa att funktionen $f(x) = \tan x - x$ har oändligt många reella nollställen. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

8.(a) Redogör för hur man hittar en primitiv funktion till funktionen

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2. \qquad (4\text{p})$$

(b) Finn en primitiv till funktionen

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2}. \qquad (3\text{p})$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1 & TM1

Lösningar 24/8-15

1. (a) konvergent ; (b) divergent ;
(c) konvergent ; (d) falskt ;
(e) falskt ; (f) sant.

---

2. (a) $$\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3\cdot 1}{1} = 3$$

(b) $$\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \frac{\ln\left(e^x(1+e^{-x})\right)}{x} =$$

$$= \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}}_{\to 1,\ x\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^x\cdot x}}_{\to 0,\ x\to\infty}$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

---

3. D_f : $x^2-1>0 \iff |x|>1$
$\Rightarrow D_f = (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$f(x)\geq 0 \ \forall x\in D_f$; $0\notin D_f$

$\Rightarrow f(x)\neq 0$ i D_f $\Rightarrow f(x)>0 \ \forall x\in D_f$

f jämn, eftersom $f(-x)=f(x)$
(ej periodisk)
räcker att rita grafen i $(1,\infty)$
och spegla den i y-axeln

$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \text{"}\frac{1}{+0}\text{"} = +\infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ $x=1$ (och $x=-1$) vertikal asymptot

Sneda?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\,1}{\underbrace{\cancel{|x|}}_{x>0}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}-\cancel{x^4}+x^2}{\sqrt{x^2-1}\cdot x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0$$

$\Rightarrow$ den räta linjen med ekvation $y=x$ är sned asymptot i $+\infty$ ($y=-x$ i $-\infty$),

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x^2-1}-x^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\cdot\cancel{2}x}{x^2-1}=$$

$$=\frac{2x(x^2-1)-x^3}{(x^2-1)^{3/2}}=\frac{x^3-2x}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$x^3-2x=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$x=0\notin D_f \Rightarrow f'=0$ för $x=\pm\sqrt{2}$

$f'(x)>0 \quad \forall x<-\sqrt{2}$ och $\forall x>\sqrt{2}$

$-''- <0 \quad \forall x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

$\Rightarrow f$ har lok. min i $\pm\sqrt{2}$

$$f''(x)=\frac{(3x^2-2)(x^2-1)^{3/2}-(x^3-2x)\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{x^2-1}\cdot\cancel{2}x}{(x^2-1)^3}=$$

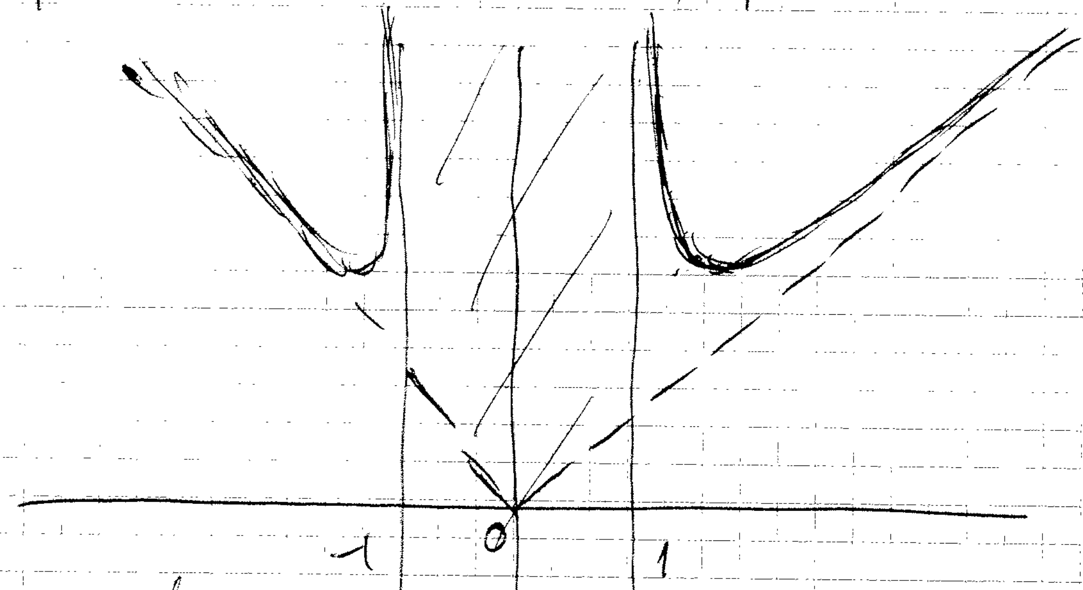
$$=\frac{1}{(x^2-1)^3}\cdot\sqrt{x^2-1}\left((3x^2-2)(x^2-1)-3x(x^3-2x)\right)=$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5}\left(\cancel{3x^4} - 3x^2 - 2x^2 + 2 - \cancel{3x^4} + 6x^2\right) =$$ 3

$$= \frac{x^2+2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow$ f konvex i $(-\infty, -1)$ och i $(1, \infty)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f	$y=-x$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$y=x$
f'		$-\ -$	0	$+$				$-$	0	$+$	$+$
f''		$+$	$+$	$+$				$+$	$+$	$+$	



(grafen ska vara symmetrisk m.a.p. y-axeln)

---

④ (a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{5}{7}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{\frac{5}{7}}\, dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\, x\right) \quad (+C)$$

(b) $I = \int_0^1 e^{-x} \sin 2x =$ 4

$$= -\int_0^1 (e^{-x})' \sin 2x \, dx \overset{p.i.}{=} -\left[e^{-x}\sin 2x\right]_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 e^{-x} \cdot 2\cos 2x \, dx = -\frac{\sin 2}{e} -$$

$$-\left[e^{-x} \cdot 2\cos 2x\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^{-x} \cdot 4 \sin 2x \, dx}_{=4I}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x} \sin 2x \, dx = \frac{1}{5}\left(2 - \frac{\sin 2 + 2\cos 2}{e}\right)$$

---

5. $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \xrightarrow[x \to 1]{} \infty$$

$\Rightarrow$ f har ej ändlig derivata i 1

---

6. tan x är definierad i alla intervall av typen

$$\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), \forall k \in \mathbb{Z}$$

(och odefinierad i $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$)

$$\lim_{x \to (2k-1)\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lim_{(2k-1)\frac{\pi}{2}+} (\tan x - x) = -\infty; \quad \lim_{(2k+1)\frac{\pi}{2}-} (\tan x - x) = +\infty$$

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ s.a. $(2k-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 < (2k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2$

s.a. $\tan x - x < 0$ i $\left((2k-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1,\right)$

$\tan x - x > 0$ i $(2k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2$

$\Rightarrow$ $\tan x - x$ har nollställe i intervallet $\left((2k-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1, (2k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right)$ $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

två sådana intervall har tomt snitt $\Rightarrow$ $\tan x - x$ har oändligt många reella nollställen

---

8b

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{((x+1)^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{x+1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx}_{=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)} - \underbrace{\int \frac{dx}{((x+1)^2+1)^2}}_{\text{enligt boken}}$$