**TMA970**
**Matematik Chalmers**
**Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**
Datum: 2015-01-05, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==========================================

**1.** Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}; \qquad \textbf{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}; \qquad \textbf{(c)} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

**(d)** Om funktionen $f$ är deriverbar i $(a,b)$, och $f$ är strängt växande i $(a,b)$, så gäller att $f' > 0$ i $(a,b)$.

**(e)** Om funktionen $f$ är deriverbar i $(a,b)$, och $f$ är strängt växande i $(a,b)$, så gäller att $f' \geq 0$ i $(a,b)$.

**(f)** Om funktionen $f$ är deriverbar i $(a,b)$, och $f$ är strängt växande i $(a,b)$, så gäller att $f' \not< 0$ i $(a,b)$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1$p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

**2.** Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) \quad (3\text{p}); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (3\text{p}).$$

**3.** Rita grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

**4.(a)** Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$. (3p)

**(b)** Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. (3p)

**5.** Givet funktionen $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$, finn $f$:s lokala extrema. (6p)

**6.** Visa att

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

för alla naturliga tal $n$. (6p)

**7.** Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p) Använd satsen för att härleda derivatan av arctan. (2p)

**8.** Använd satsen om variabelsubstitution i Riemannintegralen för att bevisa påståendena:

Om funktionen $f$ är kontinuerlig och jämn på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{(3p)}$$

Om funktionen $f$ är kontinuerlig och udda på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad \text{(3p)}$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

# TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

## Lösningar 5/1-2015

**1.** (a) konvergent ; (b) konvergent ;
(c) konvergent ; (d) falskt ;
(e) sant ; (f) sant.

---

**2.** (a) $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln \frac{2x+1}{x+1} =$

$$= \ln \frac{2 + 1/x}{1 + 1/x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ln 2$$

(b) $\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1-x)}{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

---

**3.** $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

$D_f$ : $x \geq 0$ och $4 - x \geq 0$

$\Rightarrow D_f = [0, 4]$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$ Inga

$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = 2$ asymptoter.

$f(x) = \underbrace{\sqrt{\dots}}_{\overset{\vee\!|}{0}} + \underbrace{\sqrt{\dots}}_{\overset{\vee\!|}{0}} \geq 0 \quad \forall\, x \in D_f$

$f(x) = 0$ om båda termerna $= 0$ samtidigt

2

$\sqrt{x}$ och $\sqrt{4-x}$ kan inte vara $=0$ samtidigt

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in [0,4]$

ej jämn / udda, ej periodisk (det finns dock en symmetri, vilket man inser om man gör variabelbytet $x = t+2$)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}} = 0 \quad \text{för } \sqrt{x} = \sqrt{4-x} \quad \Big|^2$$

$$\Leftrightarrow x = 4-x$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

| $x$ | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+\infty$ | + | 0 | − | $-\infty$ |

$f(2) = 2\sqrt{2}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{(4-x)^3}} \cdot (-1) < 0$$

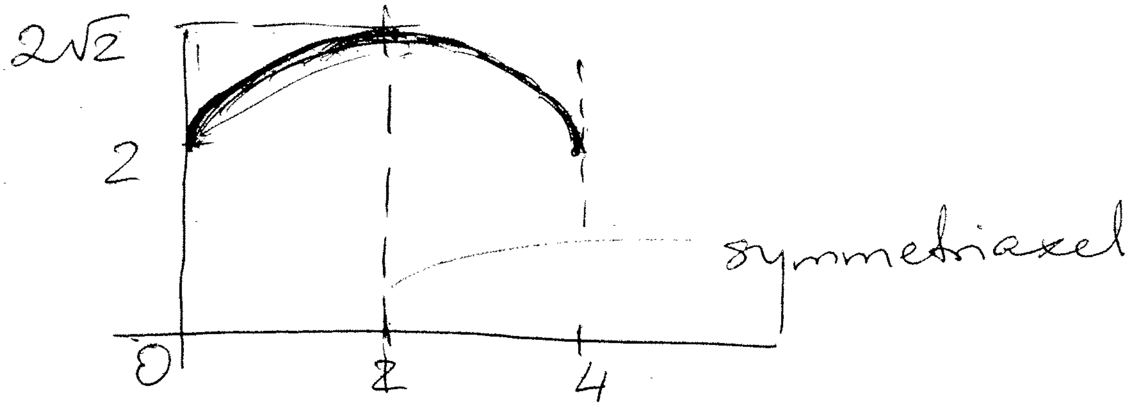
$\forall x \in (0,4)$

$D_{f'} = D_{f''} = (0,4)$

$\Rightarrow f$ konkav i $D_f$

| $x$ | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | $\nearrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\searrow$ | 2 |
| $f'$ | $+\infty$ | + | 0 | − | $-\infty$ |
| $f''$ | | − | − | − | |

3




---

4. (a) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int x \cdot \frac{(x^2+9)'}{\sqrt{x^2+9}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\int x \cdot \cancel{2}\left(\sqrt{x^2+9}\right)'\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+9} - \int \sqrt{x^2+9}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{x^2+9-9}{\sqrt{x^2+9}}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{x^2+9}\,dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow\ x\sqrt{x^2+9} - \int \sqrt{x^2+9}\,dx = \int \sqrt{x^2+9}\,dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow 2\int \sqrt{x^2+9}\,dx = x\sqrt{x^2+9} + 9\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) \quad (+C)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} - \frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$$

(Kan även angripas med substitutionerna $x = 3\tan t$ och $x + \sqrt{x^2+9} = t$.)

4

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}{\tan^2 x + 4} = \left[\begin{array}{l} t = \tan x \\ x=0 \,;\, t=0 \\ x = \frac{\pi}{4} \,;\, t = 1 \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array}\right] =$

$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+4} = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{4}_{2}} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\left[\arctan \frac{t}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$

---

5. $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ , $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2 + \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot(x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x =$

$= 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\qquad D_{f'}: x \neq 0$

$\Rightarrow$ lokala extrema kan finnas där $f'=0$ eller där $\nexists f'$

$2 + \frac{1\cdot 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad : \quad \cancel{2}\sqrt[3]{x} = -1\cdot\cancel{2} \;\Big|^3$

$\Leftrightarrow x = -1$

$\nexists f' : x = 0$

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\cancel{\infty}\,\Big\|\,\infty$ | $+$ |

$\Rightarrow f$ har lok. max i $-1$ och lok. min i $0$

(6.) 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - t \\ dx = -dt \\ x=0: t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}: t=0 \end{array} \right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)}_{=\sin t}^{n} (-1)\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

---

Alternativ lösning: m.h.a. induktion

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx ; \; J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

(1) $I_k = J_k$ kollas direkt för $k=1,2$

(2) Antag likheten sann för $n = m$, för ngt $m \in \mathbb{N}$

(3) Är den då sann för $n = m+1$?

$$I_{m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \underbrace{\cos x}_{=(\sin x)'} \, dx = \underbrace{\Big[\sin x \cos^m x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot m \cos^{m-1} x \cdot (-\sin x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cdot m \cdot \cos^{m-1} x \, dx =$$

$= m I_{m-1} - m I_{m+1}$, och likadant för $J_{m+1}$

$\Rightarrow$ följer likheten