TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2014-10-30, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Elin Solberg, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \textbf{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx\,.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om funktionen f är deriverbar i $[a,\infty)$, och f' har ett ändligt gränsvärde när $x \to \infty$, så har f asymptot i ∞.

(e) Om funktionen f är deriverbar i $[a,\infty)$, och f har asymptot i ∞, så har f' ett ändligt gränsvärde när $x \to \infty$.

(f) Om funktionen f har asymptoten $y = 2x$ när $x \to \infty$, sä gäller att $f(x) \to \infty$ när $x \to \infty$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+7}\right)^{2x-1} \quad (3\text{p}); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x + x}{\ln(1-x)} \quad (3\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x+5}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx\,.$ (3p)

5. Bestäm alla reella tal a sådana att ekvationen $x \ln x = a$ har två olika reella lösningar. (6p)

6. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,,$$

för alla naturliga tal n. Motivera! (6p)

7. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inkl. Rolles sats). (6p) Kan man tillämpa satsen på funktionen $f(x) = |x|$ på intervallet $[-1, 1]$? (1p)

8.(a) Använd satsen om variabelsubstitution i Riemannintegralen för att bevisa påståendena:

Om funktionen f är kontinuerlig och jämn på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{(3p)}$$

Om funktionen f är kontinuerlig och udda på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad \text{(3p)}$$

(b) Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{173} \cos x \, dx. \qquad \text{(1p)}$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

$\triangle 1$

TMA970, Inledande matematisk analys F1/TM1

Lösningar 30/10-14

1. (a) konvergent; (b) konvergent; (c) konvergent; (d) falskt; (e) falskt; (f) sant.

---

2. (a) $\underbrace{\left(\frac{x}{x+7}\right)^{2x-1}}_{= e^{(2x-1)\ln\frac{x}{x+7}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} "1^{\infty}"$ (?)

$$(2x-1)\ln\frac{x+7-7}{x+7} = (2x-1)\ln\left(1-\frac{7}{x+7}\right) =$$

$$= -\frac{7(2x-1)}{x+7}\cdot \boxed{\frac{\ln\left(1-\frac{7}{x+7}\right)}{-\frac{7}{x+7}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} -7\cdot 2 = -14$$

$\frac{7}{x+7} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, $\quad \frac{\ln\left(1-\frac{7}{x+7}\right)}{-\frac{7}{x+7}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+7}\right)^{2x-1} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{-7\cdot 2} = \underline{\underline{e^{-14}}}$$

(b) $$\frac{\arctan x + x}{\ln(1-x)} = \frac{\frac{\arctan x}{x} + 1}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$$

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

$$\frac{\arctan x}{x} = \begin{bmatrix} t = \arctan x \\ x = \tan t \end{bmatrix} = \frac{t}{\tan t} = \frac{t}{\sin t}\cdot \cos t \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$t = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \left(x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \right)$

$\Rightarrow \dfrac{\arctan x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

$\Rightarrow \dfrac{\arctan x + x}{\ln(1-x)} \longrightarrow \dfrac{1+1}{-1} = \underline{\underline{-2}}$

---

3. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x+5}$

$x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -5\} = [-5, \infty)$

$$f(x) = |x+1| + \sqrt{x+5} = \begin{cases} -x-1+\sqrt{x+5} & x \geq -5,\ x < -1 \\ x+1+\sqrt{x+5} & x \geq -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -5} f(x) = f(-5) = 4$

$\lim_{x \to -1-} f(x) = f(-1) = 2 = \lim_{x \to -1+} f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\nexists$ vertikala asymptoter

Sned asymptot?

$\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x+5}}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

$f(x) - x = 1 + \sqrt{x+5} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow \nexists$ sned asymptot (i ∞)

D_f ej symmetrisk m.a.p. 0

3

$\Rightarrow$ frågan om jämn/udda meningslös

f ej periodisk

Tecken: $f(x) = \underset{\geq 0}{\sqrt{\dots}} + \underset{\geq 0}{\sqrt{\dots}} \geq 0 \quad \forall x \in D_f$

$f(x) = 0$ skulle endast vara möjligt om båda rötterna blir 0 samtidigt (ty båda ≥ 0). Det blir de inte, så vi har $f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}} & x < -1, \; x > -5 \\ 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}} & x > -1 \end{cases}$$

$\nexists f'$ i -1 (annars skulle $|x+1|$ varit deriverbar i -1); $f' \xrightarrow[x \to -5_+]{} \infty$

$f' > 0 \quad \forall x > -1 \Rightarrow$ eventuella nollställen till f' måste $\in (-5, -1)$

$$-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 0 \Leftrightarrow \underset{\geq 0}{2\sqrt{x+5}} = \underset{\geq 0}{1}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+5) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{4}$$

$f' > 0$ i $\left(-5, -\frac{19}{4}\right)$

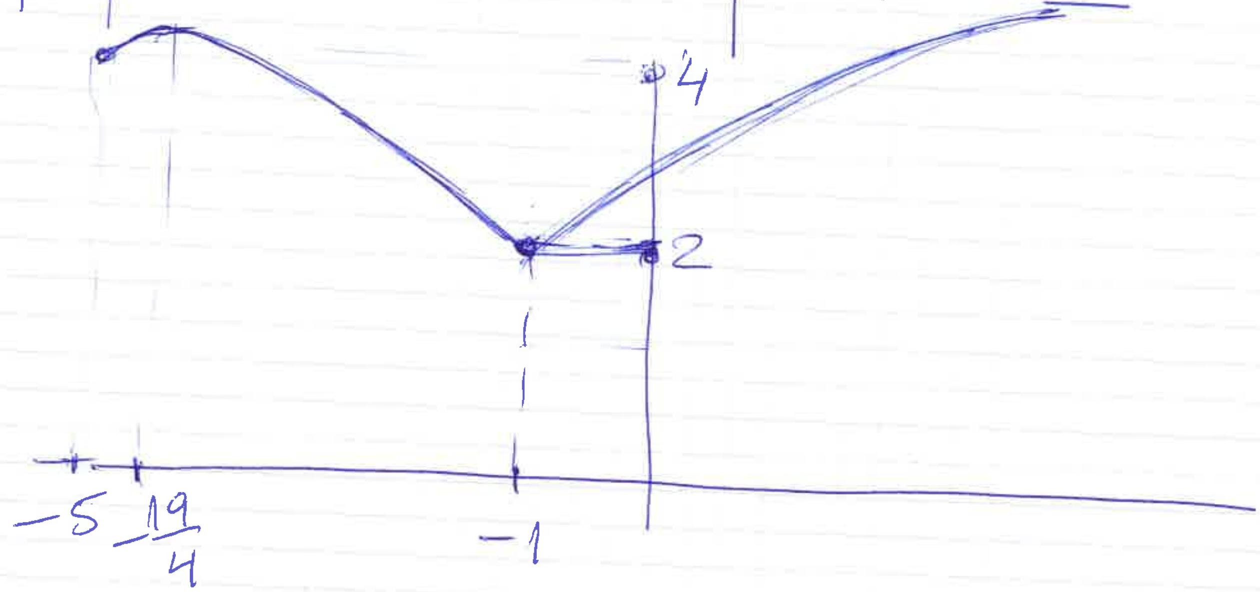
$f' < 0$ i $\left(-\frac{19}{4}, -1\right)$

$\Rightarrow f$ har lok. max i $-\frac{19}{4}$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \dfrac{1}{(x+5)^{\frac{3}{2}}} < 0 & -5 < x < -1 \\ -\dfrac{1}{4} \dfrac{1}{(x+5)^{\frac{3}{2}}} < 0 & x > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ konkav i $(-5, -1)$ och i $(-1, \infty)$.

	-5		$-\frac{19}{4}$		-1		$+\infty$
f	4	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$ lok. max	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	|	$+$	
f''		$-$		$-$	|	$-$	



---

4. (a) $$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1} = t > 0\\ x = t^2-1\\ dx = 2t\,dt\end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\ln t^2}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt = 2\cdot 2\int 1\cdot \ln t\,dt =$$

$$= 4\left(t\ln t - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt\right) = 4t(\ln t - 1) =$$

$$= 4\sqrt{x+1}\left(\frac{1}{2}\ln(x+1) - 1\right)$$ (OBS! En primitiv)

(b) $$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cdot \sin^2 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)\sqrt{\cos x}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x}\, dx$$

$$\int \sin x \sqrt{\cos x}\, dx =$$

$$= -\int (\cos x)' \sqrt{\cos x}\, dx = -\frac{(\cos x)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \left[\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(0 - \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$ (se även 7a)

---

5. $f(x) = x \ln x \quad D_f = (0, \infty)$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

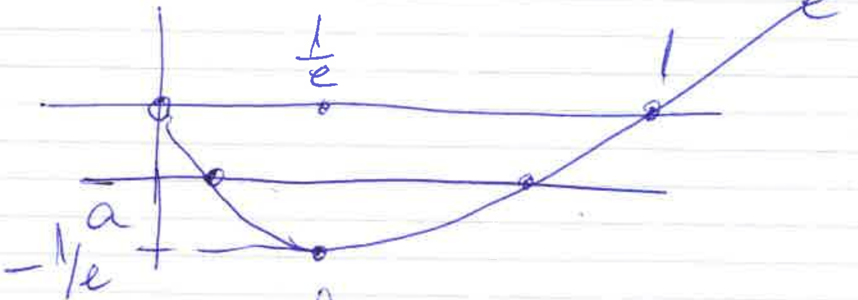
$f'(x) = \ln x + 1$

$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ (enda nollstället)

x	0		$1/e$		∞
f	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	∞
f'		$-$	0	$+$	

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

$\Rightarrow f$ har minsta värde i $\frac{1}{e}$, som är $-\frac{1}{e}$



$\Rightarrow f(x) = a$ kommer att ha två olika reella nollställen för

$-\frac{1}{e} < a < 0$.

(6.) Definiera $\triangle 6$

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Vi har att $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ $\forall x, \forall n \in \mathbb{N}$

$f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Om $f_n(x_0) = 0$ för ngt $x_0 \neq 0$,
så måste $f_n'(\xi) = f_{n-1}(\xi) = 0$
för ngt ξ mellan 0 och x_0

$\Rightarrow$ även f_{n-1} har nollställe $\neq 0$

$\Rightarrow$ (på samma sätt) f_{n-2} har nollställe $\neq 0$

$\circ \circ \circ$

$\Rightarrow$ f_0 har nollställe $\neq 0$

Men, $f_0(x) = e^x - 1$ har ett ende nollställe i 0

$\Rightarrow$ ingen av funktionerna f_n kan ha nollställe $\neq 0$

$\Rightarrow$ ekvationens enda lösning är $x = 0$

(7.) (a) Gör substitutionen $t = -x$ i integralen $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$.

(b) Funktionen $x^{173} \cos x$ är udda; använd (a).