TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2014-08-29, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Elin Solberg, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_{100}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^7-1}}; \quad \textbf{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}; \quad \textbf{(c)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (p \in \mathbb{R}); \quad \textbf{(d)} \int_{-1}^{1} x \ln|x|\,dx\,.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) Om f är deriverbar i (a, b), så är f deriverbar i $[a, b]$.
(f) Om f är deriverbar i $[a, b]$, så är f deriverbar i (a, b).
(g) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
(h) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2x+1} \quad (4p); \quad \textbf{(b)} \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right) \quad (4p).$$

3. Skissa grafen till funktionen $f_\alpha(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, för olika reella $\alpha \geq 0$. Ange gränsvärden, asymptoter och lokala extrema, inflexionspunkter etc. Förklara hur grafen ändras när α ändras. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln(x^2 + a^2),\ a > 0$. (4p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_1^3 \frac{1 + \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx\,.$ (4p)

5. Avgör om talföljden med element $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, där

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n},$$

är konvergent. (6p)

6. Funktionen f är deriverbar och obegränsad i intervallet (a, b). Visa att f' också är obegränsad i intervallet (a, b). Ge ett exempel som visar att f kan vara begränsad trots att f' är obegränsad (i samma intervall). (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (7p)

8.(a) Formulera och bevisa analysens huvudsats (även kallad integralkalkylens huvudsats, Newton-Leibniz sats). (7p)

(b) Bestäm derivatan av funktionen $\displaystyle\int_1^{\ln x} e^{t^2}\,dt$. (2p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 29/8-14

1. (a) divergent; (b) konvergent;
(c) divergent; (d) konvergent;
(e) falskt; (f) sant;
(g) falskt; (h) falskt.

---

2. (a)

$$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2x+1} = \left(\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right)^{4\cdot\frac{2x+1}{x-1}} =$$

$$= \left(\underbrace{\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}}_{\substack{\downarrow\ x\to\infty \\ e}}\right)^{\left(8+\underbrace{\frac{12}{x-1}}_{\substack{\downarrow\ \infty \\ 0}}\right)} \longrightarrow e^{8}$$

(b)

$$\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3} = \left(\text{"}\infty-\infty\text{"}\right)$$

$$= \frac{(\cancel{x^2}-2x-1)-(\cancel{x^2}-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} = \frac{5x-4}{\underbrace{|x|}_{\text{"}=\text{"}\,-x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} =$$

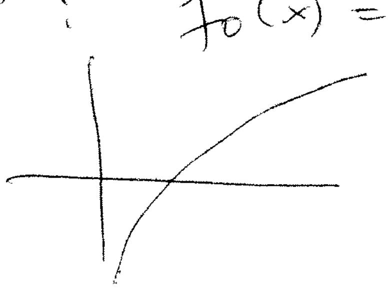
$$= -\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{5}{2}$$

$x\to-\infty$
$\Rightarrow x<0$

---

3. $\boxed{D_{f_\alpha}:\ x>0}$ oavsett $\alpha\in\mathbb{R}$

($\alpha=0$: $f_0(x)=\ln x$



känd funktion)

$\alpha > 0$: $f_\alpha(1) = 0$, ende nollstället

$f_\alpha(x) < 0$ för $0 < x < 1$, $f_\alpha(x) > 0$ för $x > 1$.

$\lim_{x \to 0_+} f_\alpha(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ $x = 0$ vertikal asymptot

$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ horisontell asymptot

$$f_\alpha'(x) = \frac{x^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}\ln x}{x^{2\alpha}} =$$

$$= \frac{1 - \alpha \ln x}{x^{\alpha+1}}$$

x	0_+		$e^{1/\alpha}$	
f_α'		$+$	0	$-$

$$f_\alpha''(x) = \frac{-\alpha \cancel{x^\alpha} - (\alpha+1)\cancel{x^\alpha} + \alpha(\alpha+1)\cancel{x^\alpha}\ln x}{x^{2\alpha+2}} =$$

$$= \frac{-(2\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)\ln x}{x^{\alpha+2}}$$

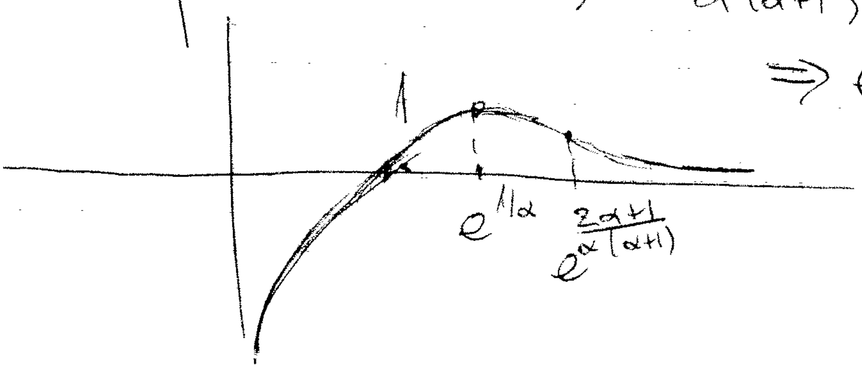
x	0_+		$e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}}$	
f_α''		$-$	0	$+$

$\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)} > 0$

$\Rightarrow$ (alla) f_α har lok. max i $e^{1/\alpha}$, inflexionspkt i $e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}} > 1$ (efter nollstället). $f_{\alpha,max} = f_\alpha(e^{1/\alpha}) = 1/\alpha e$

När α växer går f_α snabbare mot 0 i ∞; $f_{\alpha,max}$ minskar, $x_{max} = e^{1/\alpha}$ flytter sig närmare 1 (alltid > 1), pkten $\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}$ minsker också, s.a. $e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}}$ flytter sig närmare 1; $\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)} > \frac{1}{\alpha}$ alltid.

$\Rightarrow e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}} > e^{1/\alpha}$



(4.) (a) $\int \ln(x^2+a^2)\,dx =$

$\overset{p.i.}{=} x\ln(x^2+a^2) - \int x \cdot \frac{1}{x^2+a^2} \cdot 2x\,dx =$

$= x\ln(x^2+a^2) - \int \frac{2x^2+2a^2}{x^2+a^2}\,dx + 2a^2 \int \frac{dx}{x^2+a^2} =$

$= x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2\cancel{a^2} \cdot \frac{1}{\cancel{a^2}} \cdot a \int \frac{\frac{1}{a}\,dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} =$

$= x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a \cdot \arctan \frac{x}{a}$

(b) $\int_1^3 \frac{1+\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx = \begin{bmatrix} 2x = t^6 \\ dx = 3t^5\,dt \end{bmatrix} =$

$= \int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{6}} \frac{1+t^2}{\cancel{t^3}} \cdot 3t^{\cancel{5}\,2}\,dt = \left[\cancel{3}\frac{t^3}{\cancel{3}} + \frac{3t^5}{5}\right]_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{6}} =$

$= \sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt[6]{6^5} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{2^5}$

(5.) Konvergent

$\left.\begin{array}{l} a_n < n \cdot \frac{1}{n+1} < 1 \\ a_n > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ följden begränsad

$a_{n+1} - a_n = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} -$

$- \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} - \ldots - \cancel{\frac{1}{2n}} =$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \Rightarrow$ följden växande

$\Rightarrow$ konvergent

6. Exemplet: $\arcsin x$
begränsad i $(-1,1)$
(har värden i $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$),
men derivatan växer mot ∞ när
$x \to \pm 1$

Beviset: Antag att f' begränsad
i (a,b), $|f'| \leq C$ i (a,b)
Ur medelvärdessatsen följer att
$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$, där vi
väljer $a < x_0 < x < b$; $x_0 < \xi < x$
enligt m.v.s.

$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)|(x-x_0) \leq$
$\leq |f(x_0)| + C(b-x_0)$

$\Rightarrow$ f begränsad i $[x_0, b)$
analogt, f begränsad i $(a, x_0]$
$\Rightarrow$ f begränsad i (a,b)
Motsägelse!
$\Rightarrow$ f' obegränsad i (a,b)

8b Derivatan är
$e^{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$.