

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2014-01-16, kl. 14:00 - 18:00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Anna Karlsson, tel. **073-5725077**, besöker salen ca 15:00 och 17:00.

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3-1}} dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}; \quad (c) \int_0^e |\ln x| dx; \quad (d) \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{x}} dx.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) Om funktionen f är deriverbar i (a, b) , så är f kontinuerlig i (a, b) .

(f) Om funktionen f är deriverbar i (a, b) , så är f begränsad i (a, b) .

(g) Om funktionen f är deriverbar i $[a, b]$, så är f kontinuerlig i $[a, b]$.

(h) Om funktionen f är deriverbar i $[a, b]$, så är f begränsad i $[a, b]$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1p$, inget svar ger $0p$; hela uppgiften ger minst $0p$.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{x+2} \quad (4p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(1 - \cos x)}{x^2 \sin x^2} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 6x + 6 \arctan x$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = |x - 1|$. Motivera! (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin^2 x dx$. (4p)

5. Bestäm parametern α så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1} + x}{x^\alpha},$$

är ett ändligt tal, skilt från 0. (5p)

6. Funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar i sin definitionsmängd och uppfyller följande: (i) $f(2) = -1$; (ii) $f'(2) > 0$; (iii) $f''(x) \geq 0$ i $[2, \infty)$. Visa att

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; (4p)

(b) f har högst ett nollställe i intervallet $(2, \infty)$; (2p)

(c) f har minst ett nollställe i intervallet $(2, \infty)$. (2p)

7.(a) Visa att gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existerar. (7p)

(b) Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$. (2p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk
analys F/TM

Lösningar 10/1 - 14

- ① (a) divergent; (b) konvergent;
(c) konvergent; (d) divergent;
(e) sant; (f) falskt;
(g) sant; (h) sant.

② (a) $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} "0^\infty" = 0$

(b) $\frac{\sin^2(1-\cos x)}{x^2 \sin x^2} = \frac{\sin^2(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} \cdot \frac{(1-\cos x)^2}{x^2 \sin x^2} =$

$= \frac{\sin^2(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} \cdot \frac{4 \sin^4 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{x^2 \sin x^2} =$

$= 4 \left(\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2}$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}$, ty $1-\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

③ $D_f = \mathbb{R}$; $f(-x) = -f(x)$
 $\rightarrow f$ udda

ej periodisk
 $f(0) = 0$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$, ty $\begin{cases} \arctan x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \\ x^3 \text{ dominerar} \end{cases}$

f kontinuerlig i R
=> # vertikal asymptot

? # sned? $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow \pm\infty$

=> # sned asymptot
(f -> +/- A som x^3)

$$f'(x) = 3x^2 - 6 + \frac{6}{1+x^2} = \frac{3x^2(x^2-1)}{1+x^2} = 0$$

för x=0 och x=±1

x	-1	0	1
f'	+	0	-

=> f har lok. max i -1
inflexionspunkt i 0 (terass)
lok. min i +1

$$f''(x) = 6x + 6 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x =$$

$$= \frac{6x}{(1+x^2)^2} ((1+x^2)^2 - 2) =$$

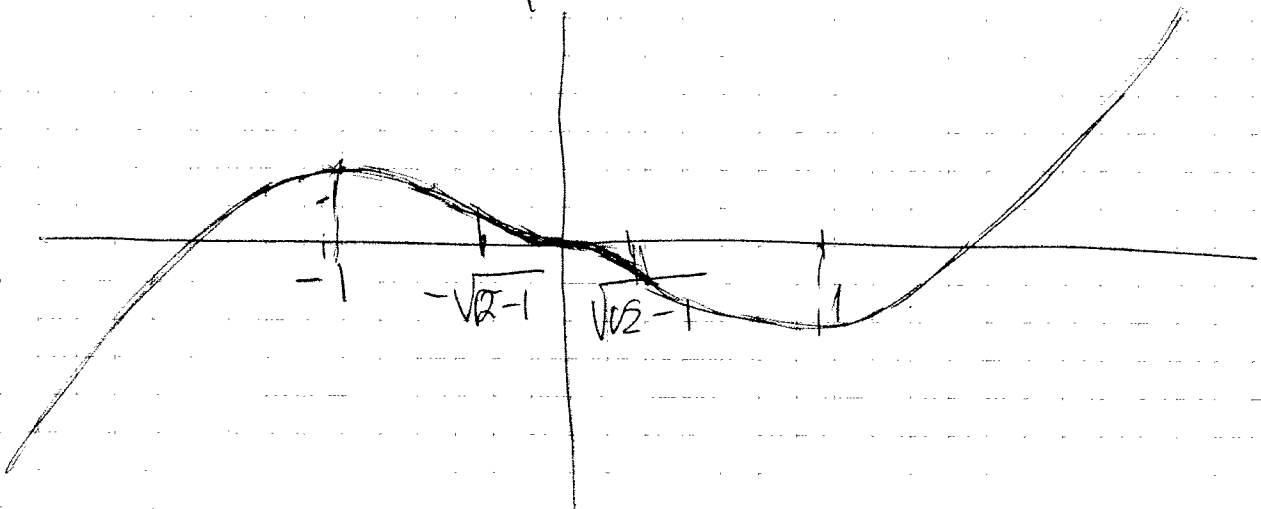
$$= \frac{6x}{(1+x^2)^2} (x^4 + 2x^2 - 1) = 0$$

för $x^2 = -1 \pm \sqrt{1+1} = \sqrt{2} - 1$
och x=0

x	$-\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$
f''	-	0	-
	f konkav	konvex	f konkav

x	$-\infty$	-1	$-\sqrt{2}-1$	0	$\sqrt{2}-1$	1	$+\infty$
f	\nearrow	$5 - \frac{3\pi}{2} > 0$	\searrow	infl.	\nearrow	$5 + \frac{3\pi}{2} > 0$	\nearrow
f'	+	0	-	0	-	0	+
f''	-	0	+	0	-	0	+

f har exakt två nollställen till:
 ett i $(-\infty, -1)$ och ett i $(1, +\infty)$
 (f udda \Rightarrow det hade räckt att
 utföra analysen för $x \geq 0$)



(4.) (a)
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

\Rightarrow om f har en primitiv F, så

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + x + C_1 & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + C_2 & x \geq 1 \end{cases}$$

f kontinuerlig $\Rightarrow \exists$ primitiv ④
 F till f

Kan man välja konstanterna C_1, C_2
s.a. F blir deriverbar i 1
(med derivata $f(1) = 0$)?

F måste vara kontinuerlig:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -\frac{1}{2} + 1 + C_1 = C_1 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \frac{1}{2} - 1 + C_2 = C_2 - \frac{1}{2}$$

kontinuitet: $C_1 + \frac{1}{2} = C_2 - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 - 1$$

utan restriktioner kan vi välja $C_2 = 0$
(vi vill ha en primitiv)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + x - 1 & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x & x \geq 1 \end{cases}$$

Kontroll att F är deriverbar i 1:

$$\lim_{x-1=h \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{x^2}{2} + x - 1 + \frac{1}{2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(x-1)} - \frac{1}{2} \cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}) - (x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2}(x+1) - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \exists F'(1) = 0 = f(1)$$

(5)

$\rightarrow F$ primitiv till $f: \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (b) \int_0^{\pi/4} x^2 \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/4} x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{4} \left(- \left[x^2 \sin 2x \right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} 2x \cdot \sin 2x \, dx \right) = \\ &= \frac{\pi^3}{384} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot 1 + \frac{1}{4} \left(- \left[x \cos 2x \right]_0^{\pi/4} + \right. \\ &\left. + \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \right) = \frac{\pi^3}{384} - \frac{\pi^3}{64} + \frac{1}{8} \left[\sin 2x \right]_0^{\pi/4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \frac{\sqrt{x^3-1} + x}{x^\alpha} = \frac{x^{3/2} \left(\sqrt{1-1/x^3} + 1/\sqrt{x} \right)}{x^\alpha}$$

$$= \frac{x^{3/2}}{x^\alpha} \left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1} \right) \rightarrow \begin{cases} \infty & \alpha < \frac{3}{2} \\ 1 & \alpha = \frac{3}{2} \\ 0 & \alpha > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 3/2$$

$\textcircled{6} f'' \geq 0$ i $[2, \infty)$
 $\rightarrow f'$ växande i $[2, \infty)$; $f'(2) > 0$
 $\rightarrow f' > 0$ i $[2, \infty)$
och $f'(x) \geq f'(2) = A \quad \forall x \in [2, \infty)$

Enligt medelvärdessatsen



$$f(x) = f(2) + f'(\xi_x)(x-2),$$

dar ξ_x mellan 2 och x

$$x > 2 : \quad 2 < \xi_x < x$$

$$\Rightarrow f'(\xi_x) \geq A$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(2) + A(x-2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ för } x > \text{ngt } B$$
$$f(2) < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ nollställe till } f \text{ i } (2, \infty)$$
$$f' > 0 \text{ i } (2, A)$$

\Rightarrow det kan inte finnas fler än ett nollställe