TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2013-08-30, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, tel. 070-3088304,
besöker salen ca 9:30 och 11:30.

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}; \quad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}; \quad \textbf{(c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; \quad \textbf{(d)} \int_{-1}^1 \ln|x|\,dx\,.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(e) Om f är kontinuerlig i a, så är f deriverbar i a.
(f) Om f inte är kontinuerlig i a, så är f inte deriverbar i a.
(g) Om f är deriverbar i a, så är f' kontinuerlig i a.
(h) Om f är deriverbar i a, så är f kontinuerlig i a.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+4}+x-2\right) \quad (4p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x+\cos x-1}{\sin x^2} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x+3}}$. (4p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^3-8}\,dx\,.$ (4p)

5. Visa att följden med element $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, där

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right),$$

är konvergent. (7p)

6. Funktionen f är två gånger deriverbar i det öppna intervallet (a,b), och $f'' > 0$ i (a,b). Om $a < x_1 \le x_2 < b$, visa att

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (7p)$$

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (7p)

8.(a) Formulera och bevisa satsen om partiell integration för obestämda integraler. Förklara vilken deriveringsregel den motsvaras av. (4p)

(b) Finn en primitiv till funktionen $e^{-2x}\sin 3x$. (4p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

TMA 970 Inledande matematisk analys F / TM

Lösningar 30/8 - 2013

1. (a) divergent ; (b) konvergent ;
(c) konvergent ; (d) konvergent ;
(e) falskt ; (f) sant ;
(g) falskt ; (h) sant .

---

2. (a) $\sqrt{x^2+4x+4}+x-2 =$

$= |x+2|+x-2 = -x-2+x-2 =$

$= -4$, ty $x \to -\infty$ och $x+2<0$ utan inskränkning

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+4}+x-2\right) = \underline{-4}$

(b) $\dfrac{\tan^2 x + \cos x - 1}{\sin x^2} =$

$= \dfrac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \cos x - 1}{\sin x^2} =$

$= \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{x^2}{\sin x^2} - \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \dfrac{\frac{x^2}{4}}{\sin x^2}$

$= \underbrace{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1,\ x\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\cos^2 x}}_{\to 1,\ x\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2}{\sin x^2}}_{\to 1,\ x\to 0} - \underbrace{2}_{2}\underbrace{\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}_{\to 1,\ x\to 0} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2}{\sin x^2}}_{\to 1,\ x\to 0} = \underline{\dfrac{1}{2}}$

(3) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$

Nollställe: $x=0$ $f>0$ i $(0,\infty)$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ udda

Asymptoter: inga vertikala

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ (x-axeln) horisontell asymptot (i $\pm\infty$)

$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0$: $x = \pm 1$

x		-1		1	
f'	$--$	0	$+$	0	$--$

$\Rightarrow f$ har lok. min i -1 och lok. max i $+1$

(p.g.a. symmetrin räcker det egentligen att titta på $x \geq 0$)

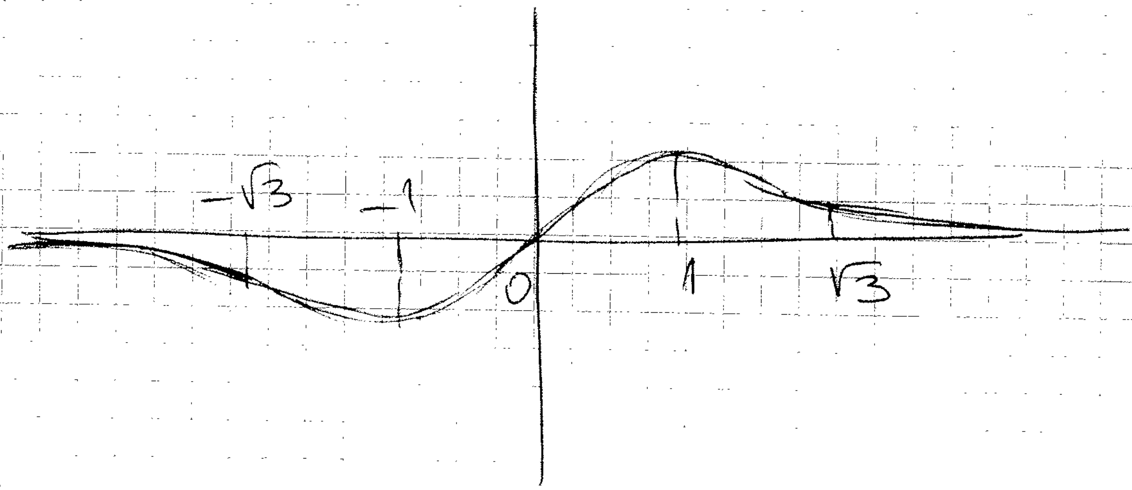
$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2+1)} \cdot 2x(2-2x^2)}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konkav		konvex		konkav		konvex

$\Rightarrow f$ har inflexion i $\pm\sqrt{3}$ och 0 (3)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f	$\to 0$		infl ↘		lok. min		0 ↗		lok. max		infl ↘		$\to 0$
f'		$-$		$-$	0		$+$		0		$-$	$-$	
f''		$-$	0	$+$			0	$-$			0	$+$	



(4) (a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-3)^2+12}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{\sqrt{12}}\right)^2}} = \int \frac{\left(\frac{x-3}{\sqrt{12}}\right)' dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{\sqrt{12}}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x-3}{2\sqrt{3}} \quad (+C)$$

b) $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$$\frac{x}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$x=2$: $\quad 2 = 12A \quad \Rightarrow \quad A = 1/6$

x^2 : $\quad 0 = A+B \quad \Rightarrow \quad B = -1/6$

$x=0 \ (x^0): \quad 0 = 4A - 2C$ 4

$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x^3-8}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+2x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\ln|x-2|\Big]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(x+1)-3}{(x+1)^2+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}(0-\ln 2) - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2+3}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+3} = -\frac{1}{6}\ln 2 -$$

$$- \frac{1}{12}\Big[\ln(x^2+2x+4)\Big]_0^1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{6}\ln 2} - \frac{1}{12}\ln 7 + \cancel{\frac{1}{12}\ln 4} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{12}\ln 7 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$$

---

5. $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{<1} < a_n$$

$\Rightarrow$ följden är avtagande och nedåt begränsad

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$

6. $f'' > 0$ i (a, b) $\triangle 3$

$\Rightarrow f'$ strängt växande i (a, b)

För $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) =$$

$$= \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{2} - \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} f'(\xi)\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{1}{2} f'(\eta)\left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(x_2 - x_1)\left(f'(\xi) - f'(\eta)\right),$$

enligt medelvärdessatsen, där

$$\underbrace{\xi \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right), \quad \eta \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \xi > \eta$$

$$\Rightarrow f'(\xi) > f'(\eta)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq 0$$

(om $x_1 = x_2$: "=")