TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2013-01-16, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam Andersson, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$; **(b)** $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$; **(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx\,.$

Avgör om gränsvärdena nedan existerar. Ge endast svar: finns ändligt/finns oändligt/finns varken ändligt eller oändligt.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x+\ln(1-\sin^2 x)}{x\sqrt{1-\cos x}}$;
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2e^{1/x^2}$;
(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2\ln(1+x^2)}}{x^4+1}$;
(h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}\,.$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger −1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}\quad(4p);\qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\ln(1-\sin x^2)}\quad(4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$. (4p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin x\cos 2x\,dx\,.$ (4p)

5. Härled formeln för volymen av en rak cirkulär kon med basradie r och höjd h. (5p)

6. Funktionen $f(x)$ är den primitiva funktion till $1-e^{-x^2}$ som uppfyller $f(0)=0$. Visa att f är en udda funktion. (3p) Visa att $|f(x)|<|x|$ för alla reella $x\neq 0$. (3p) Rita f:s graf. (2p)

7.(a) Visa att gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existerar. (7p)

(b) Visa att $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$. (2p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 16/1 - 2013

1. (a) konvergent; (b) divergent;
(c) konvergent; (d) konvergent;
(e) finns oändligt;
(f) finns oändligt;
(g) finns ändligt;
(h) finns ändligt.

---

2. (a)
$$\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2} = \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+2} =$$
$$= \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}(x+2)} =$$
$$= \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2(x+2)}{x+1}} =$$
$$= e^{\underbrace{\frac{2(x+2)}{x+1}}_{\to 2,\ x\to\infty}\ln\left[\underbrace{\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}}_{\to e,\ x\to\infty}\right]} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^2$$

(b)
$$\frac{\sin^2 x}{\ln(1-\sin x^2)} = \frac{-\sin x^2}{\ln(1-\sin x^2)}\cdot\frac{-\sin x^2}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$\xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot(-1)\cdot 1^2 = -1$$

---

3. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$

2

f varken jämn eller udda

ej periodisk

$f > 0 \quad \forall x \in D_f$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^0 = 1$$

$f < 1$ för $x < 1$

$f > 1$ för $x > 1$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = "e^{-\infty}" = 0$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = "e^{\infty}" = \infty$$

$\Rightarrow$ $y = 1$ horisontell asymptot i $\pm\infty$

$x = 1$ vertikal asymptot

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} < 0 \quad \text{i } D_f$$

$\Rightarrow$ f avtagande i $(-\infty, 1)$ och i $(1, +\infty)$

$$f''(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}$$

$f'' > 0$ i $(\frac{1}{2}, 1)$ och i $(1, +\infty)$

$f'' < 0$ i $(-\infty, \frac{1}{2})$

$f''(\frac{1}{2}) = 0$; f'' byter tecken i $\frac{1}{2}$

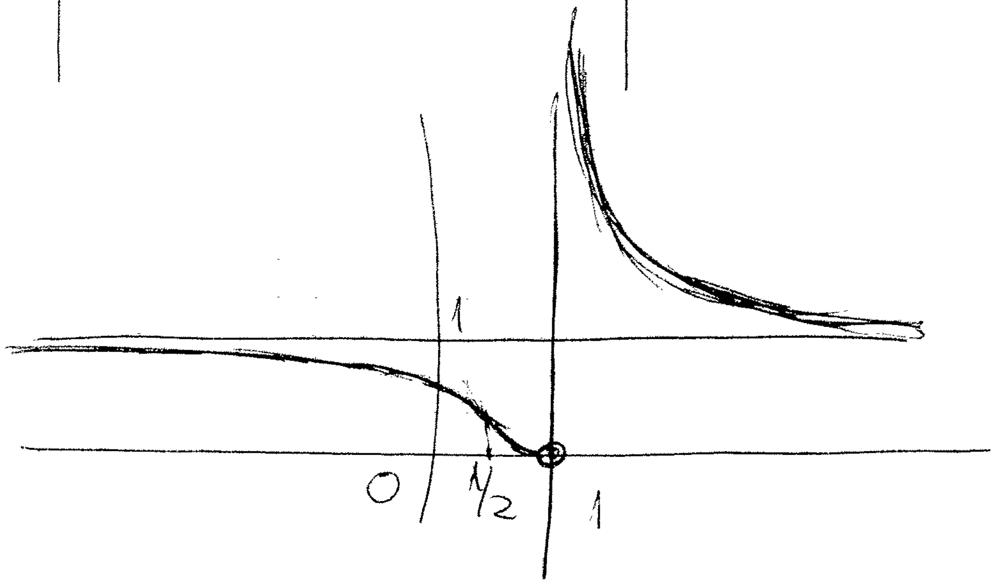
$\Rightarrow$ f konvex i $(\frac{1}{2}, 1)$ och i $(1, \infty)$

f konkav i $(-\infty, \frac{1}{2})$

f har inflexionspkt i $1/2$

$$\left(f' \xrightarrow[x\to 1-]{} 0 \right)$$

	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1			∞
f	1	$\searrow$	inflex. $\searrow$		0 | $+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	1
f'	$-$	$-$	$-$		| $-$	$-$	$-$	
f''	$-$	$-$	0	$+$	|	$+$	$+$	



---

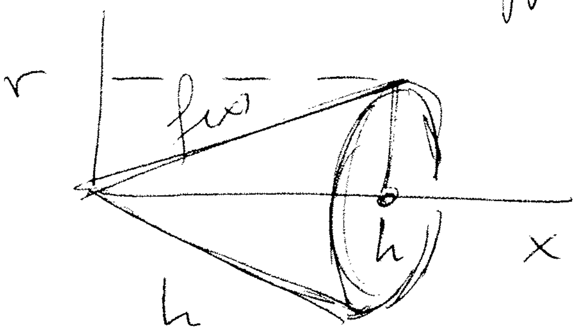
4. (a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\underbrace{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}_{=\frac{1}{9}}}} = \frac{1}{(1/3)\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{3\,dx}{1-\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)$$
$$(+C)$$

(b) Integranden är udda; integrationsgränserna är symmetriska $\Rightarrow$ integralen $= 0$.

5. Rotationskropp: 4



$$f(x) = \frac{r}{h} x$$

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h =$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

---

6. Vi vill visa att $f(x) = -f(-x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$

($D_f = \mathbb{R}$, symmetrisk m.a.p. 0)

$$\left(f(x) + f(-x) \right)' = f'(x) - f'(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ty f' jämn

$\Rightarrow f(x) + f(-x) \equiv \text{const}$

$x = 0$: $f(0) + f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) + f(-x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ udda funktion

$\Rightarrow$ räcker att rita grafen för $x > 0$

(1>) $f' > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f$ växande i $(0, \infty)$

$f'(0) = 0$; $f' > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ i 0 har f terasspkt

$f''(x) = 2x e^{x^2} > 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ konvex i $(0, \infty)$