Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2011-08-22, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Dawan Mustafa, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Visa att polynomet $(x+1)^n(nx+x-1)+1-x$ är delbart med x^2 för alla $n\in\mathbb{N}$. (4p)

2. Kurvan C i planet ges i polära koordinater av $C: r=\sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}},\ -\pi \xrightarrow{\varphi} \pi$.
Skissera C och beräkna arean av det område som omslutes av C. (4p)

3. Låt $f(0)=1$ och $f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ för $0\neq x\in\mathbb{R}$.

a) Visa att f är kontinuerlig och injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(\frac{\sinh 1}{e^3}\right)$. (8p)

b) Är $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (3p)

4. Beräkna $\lim_{x\to 0} f(x)$ och $\lim_{x\to 1-} f(x)$ för $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctanh}(x)}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ ($\operatorname{arctanh} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$). (6p)

5. Beräkna längden av kurvan C: $t\mapsto\left(\sqrt{3t-t^2},\ t,\ -3\ln\sqrt{3-t}\right),\ 0\xrightarrow{t}2$. (6p)

6. Låt $f(x)=\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\in\mathbb{R}$.

a) Visa att $f(x)=2\arctan(|x|)$. (4p)

b) Är f deriverbar? (3p)

c) Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (5p)

d) Beräkna arean av det begränsade område i planet som inneslutes av kurvan $y=f(x)$ och linjen $y=\frac{2\pi}{3}$. (6p)

7. Bestäm $(I\times M)\cup(M\times I)$ då $I=[0,1]$ och $M=\{0,1\}$. (3p)

8. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 och TM (tma970), 11-08-22

uppg.1

Sätt $p(x) = (x+1)^n (nx + x - 1) + 1 - x$ $(n \in \mathbb{N})$.
Vi skall visa att $p(x)$ är delbart med x^2 för $2 \leq n \in \mathbb{N}$ (klart för $n = 1$):

bevis 1: 0 är nollställe till p av multiplicitet minst 2 ty $p(0) = p'(0) = 0$
$\left[p'(x) = n(x+1)^{n-1}(nx + x - 1) + (x+1)^n (n+1) - 1\right]$, alltså
$p(x) = (x-0)^2 k(x)$, k ett polynom av grad n. vsv

bevis 2: $p(x) = (nx + x - 1)(x+1)^n + 1 - x = (nx + x - 1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + 1 - x =$

$$= (nx + x - 1)\left(1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) + 1 - x =$$

$$= \left(n^2 + n\right) x^2 + x - 1 + (nx + x - 1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k + 1 - x =$$

$$= \left(n^2 + n\right) x^2 + (nx + x - 1) x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-2}$$ vilket är delbart med x^2. vsv

bevis 3: med induktion: Vi skall visa att $(x+1)^n (nx + x - 1) + 1 - x$
är delbart med x^2 för alla $n \in \mathbb{N}$:

I. $n = 1$: $(x+1)(2x-1) + 1 - x = 2x^2$ är delbart med x^2, ok.

II. Föruts.: $(x+1)^p (px + x - 1) + 1 - x$ är delbart med x^2 för $p \in \mathbb{N}$,
$1 \leq p \leq N_0$, för något $N_0 \geq 1$.

Påst.:$(x+1)^{N_0+1}((N_0+1)x + x - 1) + 1 - x$ är delbart med x^2.

Bev.: $(x+1)^{N_0+1}((N_0+1)x + x - 1) + 1 - x =$

$$= (x+1)^{N_0+1}(N_0 x + x - 1) + x(x+1)^{N_0+1} + 1 - x =$$

$$= (x+1)\left[(x+1)^{N_0}(N_0 x + x - 1) + 1 - x\right] -$$

$$- (x+1)(1-x) + x(x+1)^{N_0+1} + 1 - x =$$

$$= (x+1)\left[(x+1)^{N_0}(N_0 x + x - 1) + 1 - x\right] + \left[x^2 + x(x+1)^{N_0+1} - x\right]$$

är delbart med x^2 ty $(x+1)^{N_0}(N_0 x + x - 1) + x - 1$ är delbart med x^2
enligt förutsättningen och $x + (x+1)^{N_0+1} - 1 = x + \sum_{k=1}^{N_0+1} \binom{N_0+1}{k} x^k$
är delbart med x . vsv

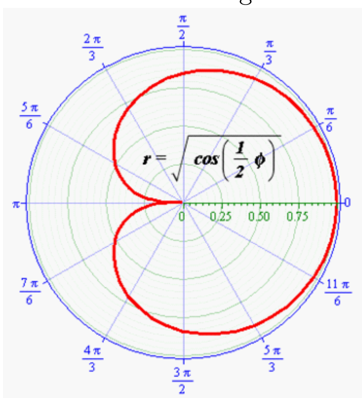
III.Induktionsaxiomet ger då att $(x+1)^n (nx + x - 1) + 1 - x$ är delbart med x^2 för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

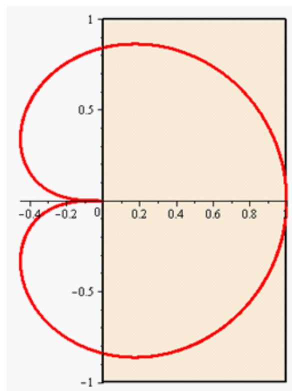
ANM: Vi har visat att $(m+1)^n (nm + m - 1) + 1 - m$ är delbart med m^2
för alla $n \in \mathbb{N}$ och $m \in \mathbb{Z}$.

uppg.2

Området i planet innanför $C : r = \sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}}$, $-\pi \xrightarrow{\varphi} \pi$ (r, φ polära koordinater) har arean $\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(r(\varphi))^2\,d\varphi = [\cos \text{ är jämn}] = \int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \left[2\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = 2.$

Rita kurvan C genom att rita punkterna $(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$ för t.ex. $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$: r (= avståndet till origo) avtar från 1 till 0, kurvan är symmetyrisk m.a.p. $x-$axeln. Observera att arean innanför C är lika stor som arean av rektangeln med sidorna 1 och 2:





svar: $\boxed{2}$

uppg.3

$f(x) = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.

a) f är kontinuerlig i alla punkter $x \neq 0$ ty sammansatt av kontinuerliga funktioner; f är kontinuerlig även i 0 ty $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x}}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{e^0}\cdot 1 = f(0)$ $[\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x} = e^0 = 1 =$ derivatan av e^x i punkten $x = 0]$. För $x \neq 0$ är

$f'(x) = \frac{\left(-e^{-x}+2e^{-2x}\right)x-e^{-x}+e^{-2x}}{x^2} = \frac{2x-xe^x-e^x+1}{x^2e^{2x}}$; sätt $g(x) = 2x - xe^x - e^x + 1$:

$g'(x) = 2(1-e^x) - xe^x = \begin{cases} >0 \text{ då } x<0 \ \ (1>e^x) \\ <0 \text{ då } x>0 \ \ (1<e^x) \end{cases}$, det visar att g antar i 0 ett strängt maximum, dvs. att $g(x) < g(0) = 0$ för $x \neq 0$, således är $f' < 0$ på $]-\infty, 0[$ och på $]0, \infty[$, det ger att f är strängt avtagande på $]-\infty, 0]$ och på $[0, \infty[$ (ty f är kontinuerlig), alltså är f strängt avtagande och därmed injektiv (på $D_f = \mathbb{R}$!).

$Df^{-1}\left(\frac{\sinh 1}{e^3}\right) = \frac{1}{Df(a)} = \frac{a^2e^{2a}}{2a-ae^a-e^a+1}$ där $f(a) = \frac{e^{-a}-e^{-2a}}{a} = \frac{e^{-\frac{3a}{2}}\left(e^{\frac{a}{2}}-e^{-\frac{a}{2}}\right)}{a} =$
$= e^{-3}\sinh 1$ för $a = 2$, alltså $Df^{-1}\left(\frac{\sinh 1}{e^3}\right) = \frac{4e^4}{5-3e^2}$.

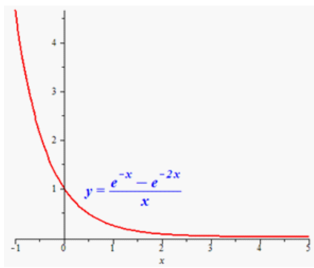
b) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent ty f är kontinuerlig på $[0,1]$. För $x \geq 1$ är

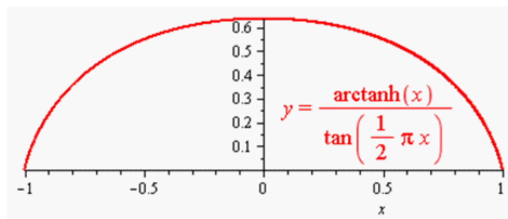
$0 \leq \frac{e^{-2x}}{x} \leq \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$, $\int\limits_1^{\infty} e^{-x}dx$ är konvergent, jämförelsekriteriet ger att då även $\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ och $\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-2x}}{x}dx$ är konvergenta, alltså är $\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-2x}}{x}\right)dx$ konvergent (eller $0 \le f(x) = \frac{e^{-x}\left(1-e^{-3x}\right)}{x} \le e^{-x} \underset{\text{pss}}{\Longrightarrow} \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent)

och därmed är $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent.

svar: $\boxed{\textbf{a)}\text{ ja } (f \text{ är } C^0),\ Df^{-1}\left(\frac{\sinh 1}{e^3}\right) = \frac{4e^4}{5-3e^2} \qquad \textbf{b)}\text{ konvergent}}$

ANM: I lp3 (flervariabelanalys) <u>beräknas</u> $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx = \ln 2$.





uppg. 4

Låt $f(x) = \frac{\operatorname{arctanh} x}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$, $-1 < x < 1$. Kom ihåg

$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$.

$\underline{\lim_{x\to 0} f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctanh} x}{x} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ ty

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctanh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctanh} x - \operatorname{arctanh} 0}{x} = \frac{1}{1-0}$ (derivatan av $\operatorname{arctanh} x$ i $x = 0$).

Eller $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctanh} x}{x} = \lim_{\operatorname{arctanh} x = t \to 0} \frac{t}{\tanh t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sinh t} \cdot \cosh t = 1 \cdot 1$

$\left(\frac{\sinh t - \sinh 0}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \cosh 0\right.$ (derivatan av $\sinh t$ i $t = 0$)) och

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{\frac{\pi x}{2} = t \to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = 1 \cdot 1.$

Eller $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctanh} x}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} - \frac{\ln(1-x)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{2x}{\pi}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\ln(1-x)}{-x} \cdot \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{\frac{2x}{\pi}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{-2}{\pi} \cdot 1\right) \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$ ty $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

$\underline{\lim_{x\to 1\text{-}} f(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1\text{-}} \left(\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1+x) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x)\right)\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) =$

$= \frac{1}{2}\cdot(0 \cdot \ln 2 - 0)\cdot 1 = 0$ ty $\lim_{x\to 1\text{-}} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x) = \lim_{1-x=t\to 0+} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right)\ln t =$

$= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi t}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (t\ln t) = 1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0$ ty $\lim_{t\to 0+} t\ln t = 0.$

svar: $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{\pi}, \qquad \lim_{x\to 1\text{-}} f(x) = 0}$

uppg. 5

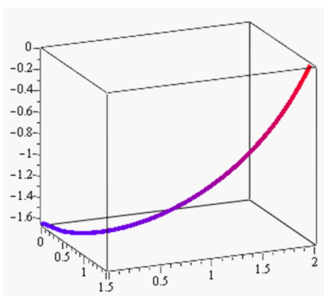
Kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{3t-t^2}, t, -3\ln\left(\sqrt{3}-t\right)\right)$, $0 \xrightarrow{t} 2$, har längden $l = \int\limits_C ds = \int\limits_0^2 \left|\boldsymbol{r}'(t)\right| dt$. Räkning: $\boldsymbol{r}'(t) = \left(\frac{3-2t}{2\sqrt{3t-t^2}}, 1, \frac{3}{2(3-t)}\right)$, då är

$$\left|\boldsymbol{r}'(t)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(3-2t)^2}{3t-t^2} + 4 + \frac{9}{(3-t)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(3-2t)^2(3-t)+4t(3-t)^2+9t}{t(3-t)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(3-t)((9+4t^2-12t+12t-4t^2))+9t}{t(3-t)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9(3-t)+9t}{t(3-t)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{t(3-t)^2}} \text{ och därmed}$$

$$l = \int\limits_0^2 \frac{3\sqrt{3}}{2(3-t)\sqrt{t}} dt = \left[\begin{array}{c} \sqrt{t} = x \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = dx \end{array}\right] = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{3\sqrt{3}}{3-x^2} dx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+x\right)\left(\sqrt{3}-x\right)} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}+x} + \frac{1}{\sqrt{3}-x}\right) dx = \frac{3}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 3\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).$$

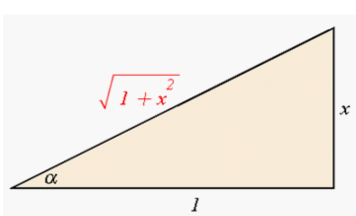


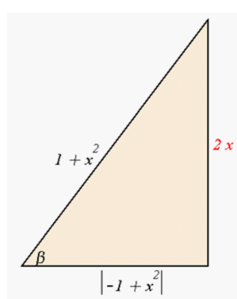
svar: $\boxed{3\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \quad \left(= 3\,\mathrm{arctanh}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\ \right)}$

uppg. 6

Observera först att $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ är jämn och väldefinierad ($D_f = \mathbb{R}$) ty $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1$, det räcker alltså att betrakta bara $x \in [0, \infty[$:

a) Vi visar att $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\arctan x$:
$f(0) = \arccos 1 = 0 = 2\arctan 0$; $f(1) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = 2\arctan 1$;
för $x \notin \{0, 1\}$ sätt $\alpha = \arctan x$ och $\beta = \arccos\frac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}$, då är $\alpha, \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
rita rätvinkliga tringlar (titta på figurerna):
för α: med kateterna x och 1, alltså hypotenusan $\sqrt{1+x^2}$,
för β: med närkateten $\left|1-x^2\right|$ och hypotenusan $1+x^2$, alltså andra kateten $2x$.
Då gäller $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2x}{1-x^2}$.





För $0 < x < 1$ är $\tan(2\alpha) = \frac{2x}{1-x^2} = \tan\beta$, det ger $2\alpha = \beta + k\pi$ och $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ger $k = 0$ $(0 < \beta + k\pi < \pi)$, alltså $2\alpha = \beta = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

För $x > 1$ är $\tan(2\alpha) = \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{2x}{x^2-1} = -\tan\beta = \tan(-\beta)$, det ger $2\alpha = -\beta + k\pi$ och $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ger $k = 1$ $(\frac{\pi}{2} < -\beta + k\pi < \pi)$, alltså $2\alpha = \pi - \beta = \pi - \arccos\frac{x^2-1}{1+x^2} = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$, därmed är visat att $2\arctan x = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ gäller för alla $x \geq 0$.

Ett annat bevis fås genom att visa att $g(x) = 2\arctan x - \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} \equiv 0$:

för $x > 0$ är $g'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \dfrac{\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} =$

$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)-(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 0$,

det ger att $g(x) = c = g(1) = 0$ (s.o.).

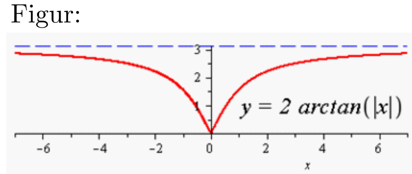
b) f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$ ty f är sammansatt av deriverbara funktioner; $x = 0$ måste kollas ty $\frac{1-0^2}{1+0^2} = 1$ är inte inre punkt i $D_{\arccos}$ (eller ty $|x|$ är inte deriverbar i 0): studera $\frac{\triangle f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$: $x > 0$: $\frac{\triangle f}{\Delta x} = \frac{2\arctan x}{x} \longrightarrow 2$ då $x \longrightarrow 0_+$, $x < 0$: $\frac{\triangle f}{\Delta x} = \frac{-2\arctan x}{x} \longrightarrow -2$ då $x \longrightarrow 0_-$

(arctan är udda och $\lim \frac{\arctan x - 0}{x-0} = \frac{1}{1+0^2} =$ derivatan av $\arctan x$ i $x = 0$), det visar att $\frac{\triangle f}{\Delta x}$ saknar gränsvärde då $x \longrightarrow 0$, dvs. att f inte är deriverbar i 0.

Utan **a)**: Sätt $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = t$ $\left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$, då gäller $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, alltså $x^2 = \frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}$ och $\lim\limits_{\triangle x \to 0+} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\left(\cos\frac{t}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} =$

$= \lim\limits_{t \to 0+} 2\left(\cos\frac{t}{2}\right)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = 2$ och $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\left(\cos\frac{t}{2}\right)t}{-\sin\frac{t}{2}} = -2$.

c) $f(x) = 2\arctan x \longrightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2}$ då $x \longrightarrow \infty$, dvs. $y = \pi$ är asymptot då $x \longrightarrow \infty$. $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \implies f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} < 0$ för $x > 0$, det ger att f är strängt konkav på $[0, \infty[$ (och därmed på $]-\infty, 0]$). Figur:



d) Bestäm $a > 0$ så att $f(a) = \frac{2\pi}{3}$ (finns ty $f(0) = 0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$ och f är kontinuerlig och strängt växande. s.o.m.v.!):

$\arccos\frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{2\pi}{3} \implies \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos\frac{2\pi}{3} \implies 1 - a^2 = -\frac{1}{2}\left(1 + a^2\right) \implies 3 = a^2$,

eller $2\arctan a = \frac{2\pi}{3} \implies \arctan a = \frac{\pi}{3} \implies a = \sqrt{3}$.

Arean är då $A = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} - f(x)\right) dx = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} - f(x)\right) dx$

$\left(0 \leq f(x) \leq \frac{2\pi}{3}\right.$ för $x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ och f är jämn).

$\underline{A} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} - 2\arctan x\right) dx = 2\left[\frac{2\pi}{3}x - 2x\arctan x + \ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{\sqrt{3}} =$

$= 2\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\frac{\pi}{3} + \ln 4\right) = \underline{4\ln 2}.$

$\left[2\int \arctan x dx = 2x\arctan x - \int \frac{2x}{1+x^2}dx = 2x\arctan x - \ln\left(1+x^2\right)\right].$

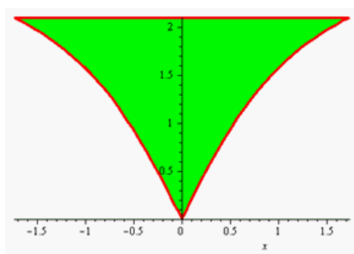
Arean kan beräknas utan **a)**, igen med partiell integration:

$\underline{A} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} - f(x)\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} - \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx =$

$= 2\left[\frac{2\pi}{3}x - x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{-2x\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} dx =$

$= 2\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\arccos\left(\frac{-2}{4}\right)\right) - 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{4x^2}} dx =$

$= 2\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)\right) + 2\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \underline{2\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\frac{2\pi}{3}\right) + 2\ln 4}.$

Så ser området ut: 

svar:

b) nej (ej i 0) **c**) konkav på $]-\infty, 0]$ och på $[0, \infty[$, asympt. $y = \pi$ **d**) $4\ln 2$

uppg. 7

$[0,1] \times \{0,1\} = \{(x,y) : x \in [0,1] \text{ och } y \in \{0,1\}\} =$

$= \{(x,0) : 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,1) : 0 \le x \le 1\}$ (de streckade röda sträckorna),

$\{0,1\} \times [0,1] = \{(x,y) : x \in \{0,1\} \text{ och } y \in [0,1]\} =$

$= \{(0,y) : 0 \le y \le 1\} \cup \{(1,y) : 0 \le y \le 1\}$ (de heldragna blåa sträckorna).

svar: $([0,1] \times \{0,1\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])$, det är sidorna i kvadraten med hörnpunkpterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$