Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2010-01-16, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Aron Lagerberg, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Låt $n \in \mathbb{N}$; visa (utan induktion) att $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. (4p)

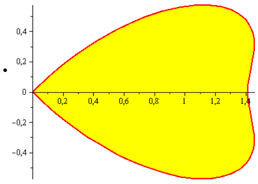
2. Visa att $2\arctan\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (4p)

3. Låt $f(x) = \sqrt{2\cos^2(2x) + \sin^2(4x)}$.

a) Är f deriverbar i $\frac{\pi}{4}$? (4p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ för $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ med angivande av extrempunkter. (6p)

c) Beräkna arean av området $D: \begin{cases} 0 \le r \le f(\varphi) \\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$, r, φ polära koordinater. (4p)



4. Låt $f(x) = \dfrac{1}{x\left(1 + (\ln(x))^2\right)}$.

a) Visa att f är injektiv och rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (8p)

b) Beräkna $\int_0^\infty f(x)\,dx$. (4p)

5. Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \dfrac{\ln(\cosh(x))}{x}$ för $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Visa att f är C^1 och beräkna $\lim_{x\to\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. (8p)

b) Är $\int_1^\infty (1 - f(x))\,dx$ konvergent eller divergent? (4p)

6. Bevisa att $\sup\left\{\dfrac{n - |\cos(n)|}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$. (4p)

7. Definiera funktionen $\arcsin x$ och härled dess derivata. (5p)

8. Formulera och bevisa regeln om derivatan av produkten av två funktioner (produktregeln). (5p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB