Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2009-10-22, kl. 8.30-12.30 i M

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Ida Säfström, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Talen C_n definieras genom $C_0 = 1$ och $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Visa med induktion att $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (6p)

2. Låt $a \in]1,\infty[$. Beräkna längden av kurvan $y = \cosh(x)$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) \xrightarrow{x} \ln(a)$

och arean av området $\{(x,y) : \ln\left(\frac{1}{a}\right) \le x \le \ln(a),\, 0 \le y \le \cosh(x)\}$. (5p)

3. **a)** Visa att funktionen $f(x) = \arcsin(x) - x$ är injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(\frac{\pi-3}{6}\right)$. (4p)

b) Är $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\arcsin x}\, dx$ konvergent eller divergent? (3p)

4. Motivera varför integralen $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx$ är konvergent och beräkna den. (6p)

5. Låt $f(0) = 1$ och $f(x) = 1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ för $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? (4p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (6p)

c) Visa att $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ för $x \in]0,\infty[$. (4p)

d) Motivera varför integralen $\int_0^\infty f(x)\, dx$ är konvergent och beräkna den. (7p)

e) Bestäm $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ och $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. (3p)

6. **a)** Definiera ”inre punkt i M” ($M \subseteq \mathbb{R}$). (2p)

b) Visa att $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. (3p)

7. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB