Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2009-08-20, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Fredrik Lindgren, tel. 0762 – 721861
OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

===

1. Bestäm $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)$ för $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$. (2p var) (6p)

2. Visa att $\arctan(\sinh(x)) = \arcsin(\tanh(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (4p)

3. Beräkna längden av kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(2t,\, t^2 \sin t,\, t^2 \cos t\right)$, $-\pi \xrightarrow{t} \pi$. (5p)

4. Låt $f(x) = \dfrac{\arctan x}{(1+x)^2} + \dfrac{x}{(1+x)\left(1+x^2\right)}$. Avgör om $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent

a) utan att beräkna en primitiv funktion till f. (4p)
b) genom att beräkna en primitiv funktion till f. (5p) (9p)

5. Låt $f(x) = (2-\cos x)\sqrt{1+\cos x}$.

a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ för $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (7p)
b) Beräkna arean av området $\{(x,y) : -\pi \le x \le \pi,\, 0 \le y \le f(x)\}$. (6p)
c) Är f deriverbar i π? (4p)

6. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion som är deriverbar på $]a,b[\setminus \{x_0\}$, $x_0 \in\,]a,b[\subseteq D_f$.
Bevisa eller motbevisa följande påståenden:

a) Om $f'(x)$ har ett gränsvärde då x går mot x_0 så är f deriverbar i x_0. (2p)
b) Om f är kontinuerlig och $f'(x)$ har ett gränsvärde då x går mot x_0 så är f deriverbar i x_0. (4p)

7. Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. (6p)

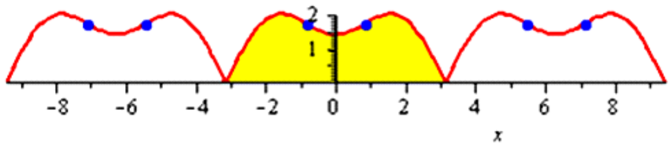
8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två (obs!) funktioner. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

09-08-20

1) 0 resp. $\frac{1}{e}$ resp.1 **3)** $4\pi+\frac{2\pi^3}{3}$ **4)** konvergent ($=\frac{\pi}{2}$) **5a)** maxpunkter: $\frac{\pm\pi}{2}$, minpunkter: $\pm\pi$, lokal minpkt.: 0, f är konvex på $[-\alpha,\alpha]$, konkav på $[-\pi,-\alpha]$ och på $[\alpha,\pi]$ med $\alpha=\arccos\frac{2}{3}$,

b) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ **c)** nej



6a) falskt, motex.: $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ **b)** sant, f är deriverbar även i x_0:

betrakta differenskvoten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x_0\neq x\in\,]a,b[)$

för $x<x_0$:

MVS gäller enligt förutsättningarna för intervallet $[x,x_0]$ och ger:

det finns ett $\xi_x\in\,]x,x_0[$ så att $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_x)$, eftersom $f'(x)$ har ett gränsvärde då $x\to x_0$ och $\xi_x\to x_0$- då $x\to x_0$- $[x<\xi_x<x_0]$ så gäller

$\lim\limits_{x\to x_0\text{-}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0\text{-}}f'(\xi_x)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.

Analogt för $x>x_0$:

MVS gäller för intervallet $[x_0,x]$ och ger:

det finns ett $\eta_x\in\,]x_0,x[$ så att $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\eta_x)$ och då gäller

$\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0+}f'(\eta_x)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ ($\eta_x\to x_{0+}$ då $x\to x_{0+}$),

alltså existerar $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$. vsv