

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2008-10-23, kl. 8.30-12.30 i H**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** David Witt Nyström, tel. 0762 – 721860**OBS:** Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt.

1. Låt $f(x) = x \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
- a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (3p) och $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$ (2p). (5p)
- b) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $\left(\frac{1}{\ln 2}, f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right)$. (3p)
2. Låt $f(x) = \arccos x - \arctan x$.
- a) Visa att f är injektiv, bestäm D_f , V_f och $Df^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (4p)
- b) Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av x -axeln, y -axeln och kurvan $y = f(x)$ (3p för beräkning av nollstället $x_0 : f(x_0) = 0$). (7p)
3. Låt $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
- a) Visa att f är injektiv och beräkna f^{-1} . (4p)
- b) Är $f \in C^1$? Är $f \in C^2$? Motivera väl! (5p)
- c) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (3p)
4. Beräkna längden av kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t}\right), 1 \rightarrow 3\sqrt{11}$. (6p)
5. Låt $f(x) = \frac{\ln(x) \arctan\left(\frac{1}{1-\sin(x)}\right)}{x\sqrt{x}}$.
- a) Är den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergent eller divergent? (5p)
- b) Bestäm $\inf\{f(n) : 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$. (4p)
6. a) Definiera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. (2p)
- b) Visa $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. (2p)
- c) Definiera $\binom{n}{m}$ ($m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$). (2p)
7. Visa att för en funktion f som är deriverbar i $]a, b[$ gäller:
 $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ är växande på $]a, b[$ (obs: det är 2 påståenden!). (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

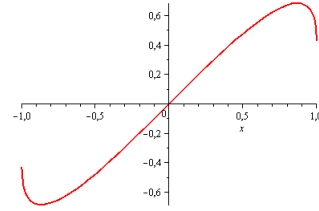
BB

SVAR

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, 07-09

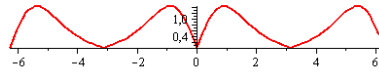
07-10-27

- 1) 0 resp. e resp. 1 2a) konvex i $[-1,0]$, konkav i $[0,1]$,
 $V_f = [\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}]$ b) konvergent 3) $a = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
 4b) $x \ln(1 + \frac{1}{x})$, konvergent c) $\frac{1}{2 \ln 2 - 1}$
 5a) f är deriverbar i origo men f' är ej kontinuerlig i origo



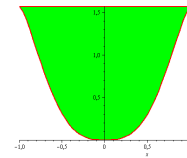
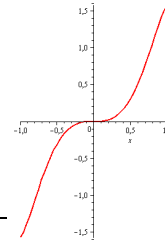
08-01-15

- 1b) $\frac{n(n-1)}{2}$ 2a) nej b) minimipunkter är $k\pi$,
 maximipunkter är $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi$, inflexionspunkter är $\frac{\pi}{2} + k\pi$ c) $4 \sinh 1$
 3) 8π 4) $\pi \ln 3$ 5) $x \ln \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}$



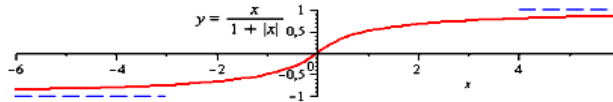
08-08-21

- 1a) 1 b) 0 c) 1 2a) 2 c) 0
 3a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) konkav på $]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$ och på $[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1]$,
 konvex på $[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}]$ och på $[0, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ c) ja d) $\frac{32}{15}$



08-10-23

- 1a) 1 resp. 0 b) $(11 \ln 2 - 3 \ln 3)x + 3y = 5$
 2a) $D_f = [-1, 1]$, $V_f = [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, $Df^{-1}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ b) $1 + \ln \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$
 3a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $x \in [-1, 1]$ b) f är C^1 , inte C^2 c) f är konvex på $]-\infty, 0]$, konkav på $[0, \infty[$,
 asymptoter $y = \pm 1$
 4) $\ln(3\sqrt{22} + 10\sqrt{2} - 3\sqrt{11} - 10) + \frac{33\sqrt{2} - 10\sqrt{11}}{33}$ 5a) konvergent b) 0



09-01-23

- 1) 1680 2a) $D_f = [-1, 1[$, $V_f = [-\frac{1}{2}, \infty[$ b) $y = \frac{2}{\pi}x$, $Df^{-1}(2) = \frac{\pi}{36}$
 3a) $\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$ b) divergent resp. konvergent
 4b) $\max = 0$, $\min = 1$,
 asymptot $y = 1$
 5a) f är deriverbar, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
 b) konvergent

