Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-08-21, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Aron Lagerberg, tel. 0762 – 721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Beräkna $\lim_{x\to 0+} f(x)$ för

a) $f(x) = x^{x\ln x}$ **b)** $f(x) = x^{\left(x^{\ln x}\right)}$ **c)** $f(x) = (-\ln x)^x$. (6p)

2. Låt $f(x) = \frac{x\sinh(x) - \cosh(x)}{(\cosh(x))^2}$.

a) Visa att f har ett nollställe i $\left]1, \frac{3}{2}\right[$. Hur många nollställen har f? (5p)

b) Visa att $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent utan att beräkna en primitiv funktion till f. (4p)

c) Beräkna $\int_0^\infty f(x)\,dx$ (tips: integrera partiellt $\int \frac{1}{\cosh(x)}dx$ …). (4p)

3. Låt $f(x) = \arcsin x + x\left(2x^2 - 1\right)\sqrt{1-x^2}$.

a) Visa att f är injektiv och ange $Df^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$. (5p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)

c) Är $|f|$ deriverbar i origo? (3p)

d) Beräkna arean av området mellan kurvan $y = |f(x)|$ och linjen $y = \frac{\pi}{2}$. (7p)

4. a) Visa att $\frac{2x}{\pi} < \sin x$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$. (4p)

b) Visa *Jordans* lemma: För $A > 0$ gäller $\int_0^\pi e^{-A\sin x}dx < \frac{\pi}{A}$.

[ledning: visa först med hjälp av **a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin x}dx < \frac{\pi}{2A}$ (3p) …] (6p)

5. Visa $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. (4p)

6. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Langranges sats). (8p)

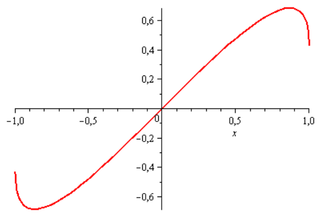
Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

SVAR

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, 07-09

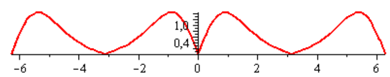
07-10-27

1) 0 resp. e resp. 1 **2a)** konvex i $[-1,0]$, konkav i $[0,1]$,
$V_f=\left[\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right]$ **b)** konvergent **3)** $a=\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
4b) $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, konvergent **c)** $\frac{1}{2\ln 2-1}$
5a) f är deriverbar i orige men f' är ej kontinuerlig i origo



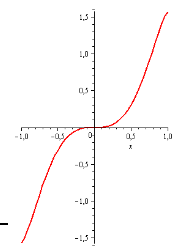
08-01-15

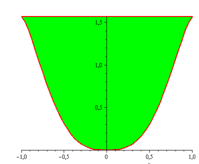
1b) $\frac{n(n-1)}{2}$ **2a)** nej **b)** minimipunkter är $k\pi$,
maximipunkter är $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+k\pi$, inflexionspunkter är $\frac{\pi}{2}+k\pi$ **c)** $4\sinh 1$
3) 8π **4)** $\pi\ln 3$ **5)** $x\ln\frac{x^2}{x^2+3x+2}$



08-08-21

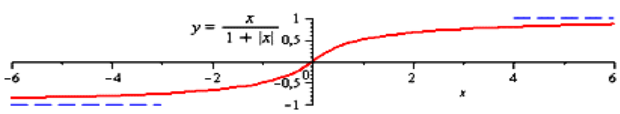
1a) 1 **b)** 0 **c)** 1 **2a)** 2 **c)** 0
3a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **b)** konkav på $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}},0\right]$ och på $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},1\right]$,
konvex på $\left[-1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ och på $\left[0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ **c)** ja **d)** $\frac{32}{15}$





08-10-23

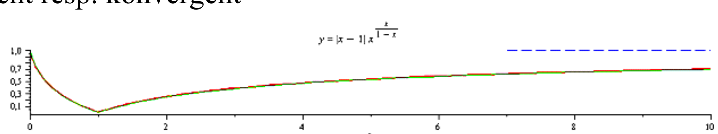
1a) 1 resp. 0 **b)** $(11\ln 2-3\ln 3)x+3y=5$
2a) $D_f=[-1,1], V_f=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right], Df^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ **b)** $1+\ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$
3a) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}, x\in[-1,1]$ **b)** f är C^1, inte C^2 **c)** f är konvex på $]-\infty,0]$, konkav på $[0,\infty[$,
assymptoter $y=\pm 1$



4) $\ln\left(3\sqrt{22}+10\sqrt{2}-3\sqrt{11}-10\right)+\frac{33\sqrt{2}-10\sqrt{11}}{33}$ **5a)** konvergent **b)** 0

09-01-23

1) 1680 **2a)** $D_f=[-1,1[, V_f=\left[-\frac{1}{2},\infty\right[$ **b)** $y=\frac{2}{\pi}x, Df^{-1}(2)=\frac{\pi}{36}$
3a) $\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$ **b)** divergent resp. konvergent
4b) max$=0$, min$=1$,
asymptot $y=1$



5a) f är deriverbar, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$
b) konvergent