Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-10-27, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Martin Berglund, tel. 0762 – 721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

===

1. Bestäm gränsvärdena $\lim_{x\to\infty}\left(\sinh\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to\infty}(\sinh x)^{\frac{1}{x}}$ och $\lim_{x\to\infty}\left(\sinh\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. (3p var) (9p)

2. Låt $f(x)=2x-\arcsin x$, $x\in[-1,1]$.

a) Rita funktionskurvan $y=f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet och värdemängden V_f. (7p)

b) Ar integralen $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (3p)

3. Bestäm a så att kurvan $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(\cosh t-t,\ \cosh t+t),\ -a\xrightarrow{t}a$ har längden 4. (6p)

4. a) Visa att $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$ för alla $x>0$. (4p)

b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ på $]0,\infty[$ och avgör med hjälp härav om $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent. (6p)

c) Visa att $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ är injektiv på $]0,\infty[$ och beräkna $Dh^{-1}(2)$. (4p)

5. Låt $f(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{då } x\neq 0 \\ 0, & \text{då } x=0 \end{cases}$.

a) Är f deriverbar i origo? Är f' kontinuerlig i origo? Motivera väl! (5p)

b) Visa att f har ett strängt lokalt minimum i origo, men att f inte är avtagande i något intervall $]-\varepsilon,0[$ och inte växande i något intervall $]0,\varepsilon[$ $(\varepsilon>0)$. (4p)

6. Låt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a,b[$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$.
Visa att om $f'(x)=0$ för varje $x\in]a,b[$ så är f konstant på $]a,b[$. (5p)

7. Visa att om en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ så är f integrerbar över $[a,b]$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 07-10-27

uppg. 1

$\frac{1}{x} \longrightarrow 0_+$ då $x \longrightarrow \infty$ och således (alltid "då $x \longrightarrow \infty$" i det följande)
$\sinh\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0_+ \implies \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) \longrightarrow -\infty \implies x\ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) \longrightarrow -\infty$
$\implies \underline{\left(\sinh\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow 0;$

$\frac{1}{x}\ln(\sinh x) = \frac{1}{x}\ln\left(e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right) = 1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) \longrightarrow 1 + 0$
$\implies \underline{(\sinh x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\sinh x)} \longrightarrow e \quad$ (e^x är kontinuerlig);

$\frac{1}{x}\ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\sinh\left(\frac{1}{x}\right)}\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 1\cdot 0$, ty $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t} = \cosh(0) = 1$
och $\lim\limits_{t\to 0_+} t\ln t = 0$, alltså $\underline{\left(\sinh\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow e^0 = 1.$

$\boxed{\textbf{svar: } 0 \quad \text{resp. } e \quad \text{resp. } 1}$

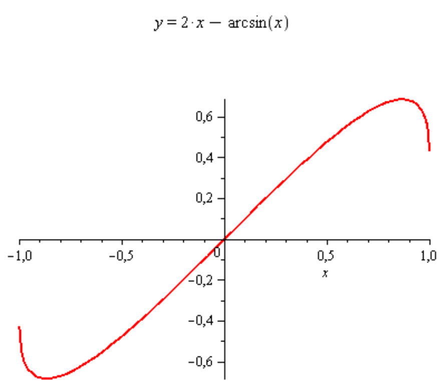
uppg. 2

a) f är kontinuerlig och udda, för $0 < x < 1$ gäller

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4\left(1-x^2\right)-1}{\sqrt{1-x^2}\left(2\sqrt{1-x^2}+1\right)} = \frac{3-4x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(2\sqrt{1-x^2}+1\right)},$$

$$\implies f'(x)\begin{cases} >0 & \text{då } x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ <0 & \text{då } x > \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \implies f \text{ antar på } [0,1] \text{ i } \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ ett största}$$

värde $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. $f''(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, det ger att f är strängt konkav i $[0,1]$. Eftersom f är udda har vi även: f är str. konvex i $[-1,0]$, antar på $[-1,0]$ ett minsta värde $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ och 0 är inflexionspunkt; $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ är f:s största värde ty $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0 > f(-1) = -2 + \frac{\pi}{2}$, satsen om mellanliggande värden ger då (f är kontinuerlig) att
$V_f = \left[-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$.



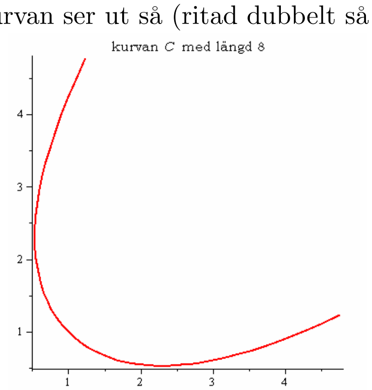
b) Enligt **a)** är $f(x) \geq 0$ för $x \in [0,1]$ (f är str. växande i $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ alltså $f(x) \geq f(0) = 0$ där; f är str. avtagande i $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ alltså $f(x) \geq f(1) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ där), alltså gäller $\arcsin x \leq 2x$ och därmed $0 \leq \frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ för $x \in [0,1]$, $\int\limits_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent, jämförelsekriteriet ger att då även $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

svar:

$\boxed{\textbf{a)} f \text{ är konvex i } [-1,0], \text{ konkav i } [0,1],\ V_f = \left[-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right] \ \textbf{b)} \text{ konvergent}}$

uppg. 3

$\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t - t, \cosh t + t) \implies |\boldsymbol{r}'(t)| = |(\sinh t - 1, \sinh t + 1)| =$
$= \sqrt{2\sinh^2 t + 2} = \sqrt{2}\cosh t$, kurvans längd är alltså
$L = \int\limits_{-a}^{a} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt =$[jämn integrand]$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^a \cosh t dt = 2\sqrt{2}\sinh a \overset{!}{=} 4 \iff$
$\sinh a = \sqrt{2} \iff a = \operatorname{arcsinh}\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$
$[\ e^a - e^{-a} = 2\sqrt{2} \iff (e^a)^2 - 2\sqrt{2}e^a = 1 \iff \left(e^a - \sqrt{2}\right)^2 = 3 ...]$.
Kurvan ser ut så (ritad dubbelt så lång)



$\boxed{\textbf{svar}:\ a = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}$

uppg. 4

Vi sätter $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

a) $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0$ för $x > 0$,
$\implies f$ är str. avtagande, alltså $f(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ln 1 - 0 = 0$ för $x > 0$.

b) $\int f(x)\,dx =$[part.int.]$= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int \frac{-x}{x(1+x)}dx - \int \frac{1}{1+x}dx =$

$= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + c$, vi tar $\underline{F(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; då kan vi beräkna

$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - \lim_{x\to 0+} F(x) = \ln 2 - \lim_{x\to 0+} (x\ln(1+x) - x\ln x) =$

$= \ln 2 - (0-0) = \ln 2$ och $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(1) =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - \ln 2 = 1 - \ln 2$ [ty $\lim_{t\to 0+} t\ln t = 0$ och $\lim_{h\to 0+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$].

$\int_0^1 f(x)\,dx$ och $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är alltså konvergenta och därmed är

$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent (med värdet 1).

c) Enligt **a)** och **b)** är $h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{F(x)}$ och $h'(x) = e^{F(x)}F'(x) =$
$= e^{F(x)}f(x) > 0$ för $x > 0$, h är alltså strängt växande och därmed injektiv på $]0,\infty[$ och $Dh^{-1}(2) = \frac{1}{h'(a)}$ där $h(a) = \left(1+\frac{1}{a}\right)^a = 2$, dvs. $a = 1$, alltså
$Dh^{-1}(2) = \frac{1}{e^{F(1)}f(1)} = \frac{1}{2\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\ln 2 - 1}$.

svar: **b)** $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent **c)** $\frac{1}{2\ln 2-1}$

uppg. 5

$f(0) = 0$ och $f(x) = x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ för $x \neq 0$.

a) f är deriverbar i 0 ty $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$
(faktorn $2+\sin\frac{1}{x}$ är begränsad, faktorn x går mot 0), men f' är inte kontinuerlig i 0 ty $f'(x) = 2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}$ och t.ex.
$\lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0 - 1 \neq f'(0)$.

b) $f(x) = x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) > 0$ för $x \neq 0$ ($\sin\frac{1}{x} < 2$), det visar:
$f(0) = 0$ är f:s minsta värde (strängt); vore f avtagande i något intervall $]-\varepsilon, 0[$ och växande i något intervall $]0,\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$) så vore $f'(x) \le 0$ för alla $x \in\,]-\varepsilon, 0[$ och $f'(x) \ge 0$ för alla $x \in\,]0,\varepsilon[$ (f är deriverbar), men det är inte möjligt ty för varje $\varepsilon > 0$ finns $n \in \mathbb{N}$ så stort att $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (ty $\frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$), då har vi $\frac{-1}{(2n+1)\pi} \in\,]-\varepsilon, 0[$ med $f'\left(\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right) =$
$= \frac{-4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0$ och $\frac{1}{2n\pi} \in\,]0,\varepsilon[$ med $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0$, alltså kan f ej vara avtagande i något intervall $]-\varepsilon, 0[$ och ej växande i något intervall $]0,\varepsilon[$. Eller visa det direkt: f är inte växande i $]0,\varepsilon[$ ty välj $n \in \mathbb{N}$ så stort att $\frac{1}{n} < \varepsilon$ och $x_1 = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}, x_2 = \frac{1}{(4n-1)\frac{\pi}{2}}$, då är $x_1, x_2 \in\,]0,\varepsilon[$, $x_1 < x_2$ men $f(x_1) = \frac{4}{((4n+1)\pi)^2} \cdot 3 > f(x_2) = \frac{4}{((4n-1)\pi)^2}$ ty $\sqrt{3}(4n-1) > 4n+1$.
Analogt för $]-\varepsilon, 0[$. vsv