Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-08-22, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Jonas Hartwig, tel. 0762 – 721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Bestäm en ekvation för normalen till kurvan $y = \left(\sin^2(x)+1\right)^{\sqrt{\sin(2x)+1}}$ i den punkt på kurvan där $x = \frac{\pi}{2}$. (4p)

2. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1}$. (5p)

3. Låt $f(x) = 1 + e\left(\sinh(x) - x\cosh(x)\right),\ x \in \mathbb{R}$.

a) Visa att f är injektiv (2p) och rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet (4p). (6p)

b) Beräkna arean av området $\{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\}$. (3p)

4. Låt $f(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-2x}\right),\ x \in \mathbb{R}$.

a) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (om de existerar). (6p)

b) Beräkna arean mellan x-axeln och kurvan $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$ (om den existerar). (6p)

5. Bestäm den primitiva funktion till $\frac{x \arctan x}{\left(x^2-1\right)^2}$ i $]-1,1[$ som går genom origo. (7p)

6. Låt $f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\ -1 \le x \le 1$.

a) Är f deriverbar i origo? (4p)

b) Beräkna längden av kurvan $y = f(x),\ -1 \le x \le 1$. (5p)

7. a) Definiera $\lim_{x\to a} f(x) = A$ för $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$. (2p)

b) Bevisa att $\frac{1}{x} \to \infty$ då $x \to 0+$. (3p)

c) Bestäm den kartesiska mängdprodukten $[1,2]\times[3,4]$ av intervallen $[1,2]$ och $[3,4]$. (2p)

8. Formulera och bevisa regeln om derivatan av en sammansatt funktion. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 07-08-22

uppg. 1

$f(x) = \left(\sin^2(x)+1\right)^{\sqrt{\sin(2x)+1}} = e^{\sqrt{\sin(2x)+1}\ln\left(\sin^2(x)+1\right)} \implies$

$f'(x) = e^{\sqrt{\sin(2x)+1}\ln\left(\sin^2(x)+1\right)}\left(\frac{\cos(2x)\ln\left(\sin^2(x)+1\right)}{\sqrt{\sin(2x)+1}} + \frac{\sqrt{\sin(2x)+1}2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+1}\right),$

$\implies f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\ln 2}(-\ln 2)$; normalens ekvation är $\frac{y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ dvs $\frac{y-2}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\ln 2}$ eller $(2\ln 2)\,y - 4\ln 2 = x - \frac{\pi}{2}$ [eller med $\sin(2x)+1 = (\sin x + \cos x)^2$].

$$\boxed{\textbf{svar}\text{: } x-(2\ln 2)\,y = \frac{\pi}{2} - 4\ln 2}$$

uppg. 2

Vi visar med induktion att $P(n) : \binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1}$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$:

Obs: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

I. $n=1$: $VL = \binom{2}{1} = 2 > \frac{4}{2+1} = HL$, $P(1)$ är alltså sant.

II. Vi skall visa att för ett godt. $p \geq 1$ gäller $P(p) \implies P(p+1)$, dvs. att $\binom{2p+2}{p+1} > \frac{4^{p+1}}{2p+3}$ är sant om $P(m)$ är sant för alla m, $1 \leq m \leq p$:

$$\binom{2(p+1)}{p+1} = \frac{(2p)!\,(2p+1)(2p+2)}{((p+1)!)^2} = \frac{(2p)!\,(2p+1)\,2}{(p!)^2\,(p+1)} =$$

$$= \binom{2p}{p}\frac{(2p+1)\,2}{p+1} \underset{P(p) \text{ är sant}}{>} \frac{4^p}{2p+1}\cdot\frac{2(2p+1)}{p+1} = \frac{4^p\cdot 2}{p+1}.$$

Vi visar nu att $\frac{4^p\cdot 2}{p+1} > \frac{4^{p+1}}{2p+3}$ (då har vi visat att $P(p+1)$ är sant):

$$\frac{4^p\cdot 2}{p+1} > \frac{4^{p+1}}{2p+3} \iff \frac{2}{p+1} > \frac{4}{2p+3} \iff 2p+3 > 2p+2$$

och detta stämmer, alltså har vi visat $P(p) \implies P(p+1)$.

III. Induktionsaxiomet ger då att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

uppg. 3

$f(x) = 1 + e(\sinh x - x\cosh x)$, $f'(x) = -ex\sinh x$.

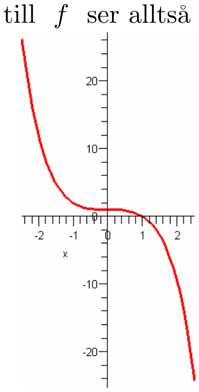
a) $f'(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, eftersom f är kontinuerlig så ger det att f är strängt växande på $]-\infty, 0]$ och på $[0, \infty[$ och därmed injektiv på hela $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = -e\,(x\cosh x + \sinh x)\begin{cases} >0, \text{ då } x<0 \\ <0, \text{ då } x>0 \end{cases}, \text{ det visar att}$$

f är $\underline{\text{str. konvex i }]-\infty, 0] \text{ och str. konkav i } [0, \infty[}$ (origo är inflexionspunkt).
Vidare gäller

$$f(x) = 1 + \tfrac{e}{2}\left((1-x)\,e^{x} - (1+x)\,e^{-x}\right) \longrightarrow \begin{cases} \infty, \text{ då } x \to -\infty \\ -\infty, \text{ då } x \to \infty \end{cases} \quad \text{ty}$$

$(1-|x|)\,e^{-|x|} \to 0$ då $|x| \to \infty$ och $(1-x)\,e^{|x|} \to \mp\infty$ då $|x| \to \pm\infty$.
Grafen till f ser alltså ut så här:



b) För $-1 \le x \le 1$ är $f(x) \ge f(1) = 0$, alltså är den sökta arean

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} 1\,dx = 2 \quad (\sinh x - x\cosh x \text{ är udda!}).$$

$\boxed{\textbf{svar: a) } f \text{ str. konvex i }]-\infty,0], \text{ str. konkav i } [0,\infty[\quad \text{b) arean är } 2}$

uppg. 4

$f(x) = e^{x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

a) $$\underbrace{\lim_{x\to-\infty} f(x)} = \lim_{e^{-x}=t\to\infty} \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2\ln(t) + \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{t} = 2\cdot 0 + 0 = 0, \text{ eller}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{x}\left(\ln\left(e^{2x}+1\right) - \ln\left(e^{2x}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}\ln\left(e^{2x}+1\right) - 2xe^{x}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\cdot\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^{-2x}} = \lim_{e^{-x}=t\to 0+} t\cdot\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2} = 0\cdot 1 = 0.$$

Vi utnyttjade standardgränsvärden $\lim\limits_{v\to 0}\frac{\ln(1+v)}{v}=1$, $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{\ln(v)}{v}=0$.

b) $f(x)>0$. Vi visar att $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ och $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ båda är konvergenta genom att beräkna en primitiv funktion F till f:

$F(x)=\int e^x\ln\left(1+e^{-2x}\right)dx =$[part.int]$= e^x\ln\left(1+e^{-2x}\right)+\int\frac{e^x\cdot 2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx =$

$= e^x\ln\left(1+e^{-2x}\right)+2\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = f(x)+2\arctan e^x$. Alltså:

$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = F(0)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x) \underset{\textbf{a)}}{=} f(0)+2\cdot\frac{\pi}{4}-0-2\cdot 0$

(integralen är alltså konvergent) och

$\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to\infty}F(x) \underset{\textbf{a)}}{=} 0+2\cdot\frac{\pi}{2}-f(0)-2\cdot\frac{\pi}{4}$ (integralen är konvergent),

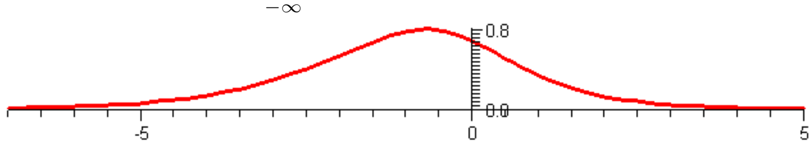
svaret är därmed $\underline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \underline{\pi}$.

<u>Anm.</u>: Konvergensen av integralerna kann även visas med hjälp av jämförelsekriteriet, t. ex. för $x\le 0$:

$f(x)=e^x\ln\left(1+e^{2x}\right)-2xe^x$, $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\ln\left(1+e^{2x}\right)dx$ är konvergent ty

$e^x\ln\left(1+e^{2x}\right)<e^x\ln 2$ och $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$ är konvergent, $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \left[xe^x-e^x\right]_{-\infty}^{0}$

är konvergent, alltså är $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ konvergent.



$\boxed{\textbf{svar:}\quad \textbf{a)}\ \text{båda är } 0 \qquad \textbf{b)}\ \text{arean är } \pi}$

uppg. 5

$$\underline{\int\frac{x\arctan x}{\left(x^2-1\right)^2}dx} = [\text{part.int}] = \frac{-1}{2\left(x^2-1\right)}\cdot\arctan x+\int\frac{1}{2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}dx =$$

$$= \frac{\arctan x}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\arctan x}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{1}{4}\left(\int\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx\right) =$$

$$= \underline{\frac{\arctan x}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{\arctan x}{4}-\frac{1}{8}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)+c}.$$

$F(0)=0$ ger $\underline{c=0}$.

$$\boxed{\textbf{svar}:\ \frac{\arctan x}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{\arctan x}{4}+\frac{1}{8}\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right)}$$

uppg. 6

a) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{x}=\dfrac{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3}-1}{x\left(\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+1\right)}=$

$$=\frac{-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2}{x\left(\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+1\right)}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{-3+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+1}\longrightarrow\begin{cases}\infty,\text{ då } x\to 0-\\ -\infty,\text{ då } x\to 0+\end{cases},$$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ saknar alltså gränsvärde då $x\to 0$, dvs. f är ej deriverbar i origo.

b) f är jämn, om längden existerar så är den $L=2\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=$

(en generaliserad integral!) $=2\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}dx=$

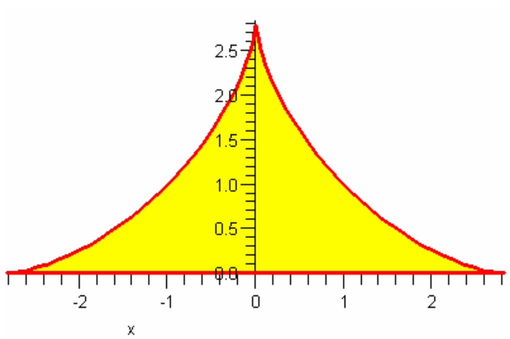
$=2\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{1-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=2\int\limits_0^1\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx=3\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=3.$

En annan lösning får du med substitutionen $x=\cos^3\varphi$, kurvan har då parameterframställningen $\begin{cases}x=\cos^3\varphi\\ y=\sin^3\varphi\end{cases}$, $0\overset{\varphi}{\to}\pi$ och längden blir

$L=\int\limits_0^\pi\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2}d\varphi=3\int\limits_0^\pi\sqrt{\cos^4\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi\cos^2\varphi}d\varphi=$(ej generaliserad)$=3\int\limits_0^\pi\left|\cos\varphi\sin\varphi\right|d\varphi=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi=3\left[\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3.$

Kurvan är (de övre två bågarna av) den välkända asteroiden.

svar: a) nej **b)** 3



uppg. 7c

$[1,2]\times[3,4]=\{(x,y):x\in[1,2],\ y\in[3,4]\}$, det är rektangeln $\underline{R:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 3\le y\le 4\end{cases}}$ (i $xy-$planet).