

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-10-25, kl. 14.00-18.00 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Elizabet Wulkan, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Är $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ resp. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent eller divergent? Motiver väl! (4p)
2. Given är kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, $0 \xrightarrow{t} a$ ($a > 0$).
- a) Beräkna längden av kurvan. (5p)
- b) Till vilken punkt kommer du om du går 2 längdenheter längs kurvan C från $(1,0,0)$? (3p)
3. Låt $f(x) = x((\ln x)^2 - \ln(x^2) + 2)$, $D_f =]0, \infty[$.
- a) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(e)$. (6p)
- b) Var är f konvex resp. konkav? (2p)
- c) Beräkna arean av området $\{(x, y): 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (6p)
4. a) Visa att $\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) < \frac{1}{x^2}$ för $x > 1$. (5p)
- b) Är $\int_0^\infty (\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)) dx$ konvergent eller divergent? (2p)
5. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(0) = 1$ och $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $0 \neq x \in \mathbb{R}$.
- a) Visa att f är jämn och kontinuerlig. (4p)
- b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}{x - \frac{\pi}{2}}$. (4p)
- c) Är f deriverbar i $\frac{\pi}{2}$? (4p)
6. a) Formulera och bevisa regeln för derivatan av en summa av två funktioner. (6p)
- b) Definiera $\binom{n}{m}$ ($m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$). (2p)
7. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (7p)

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-10-25

uppg. 1

För $0 < x \leq 1$ är $\sin x \leq x$, alltså $0 \leq \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ konvergent

\implies jämförelsekrit. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent.

För $1 \leq x$ är $|\sin x| \leq 1$, alltså $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent

\implies jämförelsekrit. $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| dx$ konvergent $\implies \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent.

svar: båda är konvergenta (alltså är $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent)

uppg. 2

a) $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t) \implies \mathbf{r}'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$, alltså är kurvans längd

$$\begin{aligned} L &= \int_0^a |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^a \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} dt = \int_0^a \sqrt{2 \cosh^2 t} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^a \cosh t dt = \sqrt{2} \sinh a \quad [\cosh^2 - \sinh^2 = 1]. \end{aligned}$$

b) $L = \sqrt{2} \sinh a = 2 \iff e^a - e^{-a} = 2\sqrt{2} \iff e^{2a} - 2\sqrt{2}e^a = 1$
 $\iff (e^a - \sqrt{2})^2 = 3 \implies e^a = \sqrt{2} + \sqrt{3} \implies a = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3});$
 punkten vi kommer till är $\mathbf{r}(a) = (\cosh a, \sinh a, \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})) =$
 $= \left(\sqrt{1 + (\sqrt{2})^2}, \sqrt{2}, \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right) = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})).$

svar: a) $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ b) $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}))$

uppg. 3

$$f(x) = x \left((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right) \quad (x > 0)$$

$$\implies f'(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 + x \left(\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} \right) = (\ln x)^2.$$

a) $f'(x) > 0$ för alla $0 < x \neq 1$, eftersom f är kontinuerlig så ger det att f är strängt växande på $]0, 1]$ och på $[1, \infty[$ och därmed injektiv på hela $]0, \infty[$.

$$Df^{-1}(e) = \frac{1}{Df(a)} \quad \text{där } f(a) = a \left((\ln a)^2 - 2 \ln a + 2 \right) = e, \text{ vi "ser" } a = e$$

$$(\ln e = 1), \text{ alltså är } Df^{-1}(e) = \frac{1}{(\ln e)^2} = 1.$$

b) $f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} \begin{cases} < 0 & \text{då } x < 1 \\ > 0 & \text{då } x > 1 \end{cases}$, dvs. f är strängt konkav i $]0, 1]$ och strängt konvex i $[1, \infty[$ (1 är inflexionspunkt).

c) $\int x \left((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right) dx = [\text{p.i.}]$

$$= \frac{x^2}{2} \left((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right) - \int \frac{x^2}{2} \left(\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \left((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right) - \int (x \ln x - x) dx = [\text{p.i.}]$$

$$= \frac{x^2}{2} \left((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right) - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} + c.$$

En primitiv funktion till f är alltså $F(x) = \frac{x^2}{2} \left((\ln x)^2 - 3 \ln x + \frac{7}{2} \right)$.

$f(x) > 0$ för $x > 0$ ty $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (standard) och f str. växande, alltså

$$\text{är arean } A = \int_0^e f(x) dx = [F(x)]_0^e = F(e) - \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) =$$

$$= \frac{e^2}{2} \left(1 - 3 + \frac{7}{2} \right) - 0 = \frac{3e^2}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \right).$$

svar: a) $Df^{-1}(e) = 1$ b) f str. konkav i $]0, 1]$, str. konvex i $[1, \infty[$ c) $\frac{3e^2}{4}$

uppg. 4

a) För $x \geq 1$ gäller $\frac{1}{x^2} < \tan \frac{1}{x^2}$ (ty $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{\pi}{2}$), det ger $\arctan \frac{1}{x^2} = \operatorname{arccot} x^2 = \frac{\pi}{2} - \arctan x^2 < \frac{1}{x^2}$ (arctan är str. växande).

Eller sätt $f(x) = \frac{1}{x^2} + \arctan(x^2) - \frac{\pi}{2}$, då är för $x > 1$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{2x}{1+x^4} = \frac{-2}{x^3(1+x^4)} < 0, \text{ dvs. } f \text{ är str. avtagande;}$$

eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ så är $f(x) > 0$ för $x > 1$ vsv.

b) Eftersom $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) < \frac{1}{x^2}$ för $x \geq 1$ och $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergerar, så

konvergerar även $\int_1^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx$ (jämförelsekriterium),

$\int_0^1 (\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)) dx$ existerar (ej generaliserad), alltså

svar: $\int_0^{\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)) dx$ är konvergent.

uppg. 5

$f(0) = 1$ och $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$.

a) f är jämn ty $f(-x) = \frac{\sqrt{1-\sin(-x)} - \sqrt{1+\sin(-x)}}{-x} = f(x)$; f är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ ty f är sammansatt av kontinuerliga funktioner ($|\sin x| \leq 1$); f är kontinuerlig även i 0 ty $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 1 = f(0)$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, \sqrt{x} är kontinuerlig).

b) Sätt $g(x) = \sqrt{1 + \sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$: g är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$, alltså är

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = g'(\frac{\pi}{2}) = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{2}}} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

c) Vi skall undersöka om $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ har ett gränsvärde då x går mot $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} &= \frac{\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}{x(x - \frac{\pi}{2})} = \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}{x - \frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{x - \frac{\pi}{2}} \right); \text{ nu är för } 0 < x < \pi \\ \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{x - \frac{\pi}{2}} &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{1 + \sin x}} = \begin{cases} \frac{\cos x}{(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{1 + \sin x}} & \text{då } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\cos x}{(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{1 + \sin x}} & \text{då } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{1 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x - \frac{\pi}{2})}{(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{1 + \sin x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ så är (med b))

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \text{ dvs.}$$

$\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ saknar gränsvärde då x går mot $\frac{\pi}{2}$, f är alltså ej deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

svar: b) $\frac{-2\sqrt{2}}{\pi}$ c) nej

Kommentarer till uppgift 1, 4b):

Jämförelsekriteriet lyder:

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för $a < x < b$ så gäller

$$\text{a) } \int_a^b g(x) dx \text{ konvergent} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ konvergent}$$

$$\text{b) } \int_a^b f(x) dx \text{ divergent} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ divergent.}$$

Typiska fel:

Många skrev olikheter typ $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$, många skrev något i stil med

" $g(x)$ är konvergent", många missade att satsen bara gäller för icke negativa funktioner.

Några försökte integrera (omöjligt), men för $[0,1]$ kunde man faktiskt substituera:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx = [x = t^2] = 2 \int_0^1 \frac{\sin t^2}{t^2} dt \text{ som är konvergent (inte generaliserad då man sätter}$$

$f(0) = 1$ för $f(t) = \frac{\sin t^2}{t^2}$ för $t \neq 0$), eller integrera 2 ggr. partiellt:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx = \left[-2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} \cos x \right]_0^1 + 4 \int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx \text{ (gränsvärdena existerar...)}$$

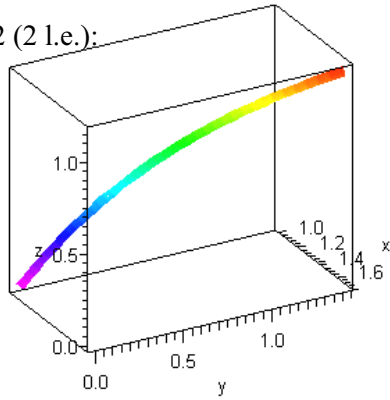
I stället för " $0 \leq f(x) \leq g(x)$ " argumenterade flera med " $f \approx g$ " (vad det nu innebär), men en sats som säger något om konvergens av integraler med sådana f, g har vi inte visat!

Uppg **4b**) kan man lösa genom att beräkna en primitiv funktion

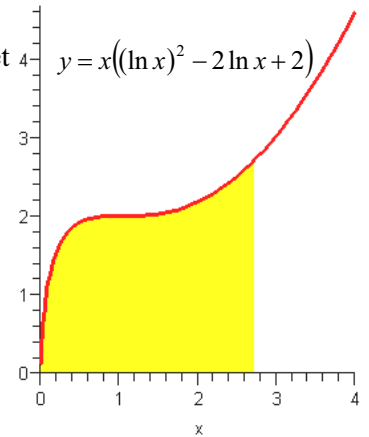
$$\left(\frac{\pi}{2} x - x \arctan(x^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \sqrt{\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}} + \arctan(\sqrt{2}x - 1) + \arctan(\sqrt{2}x + 1) \right) \right) \dots \text{ha!}$$

Figurer på baksidan

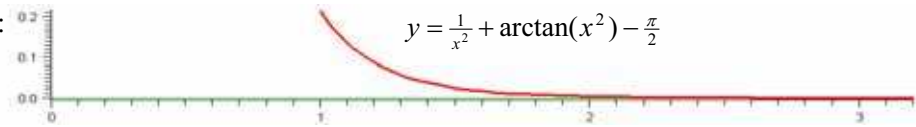
kurvan i uppg. 2 (2 l.e.):



funktionen med området
i uppg. 3:

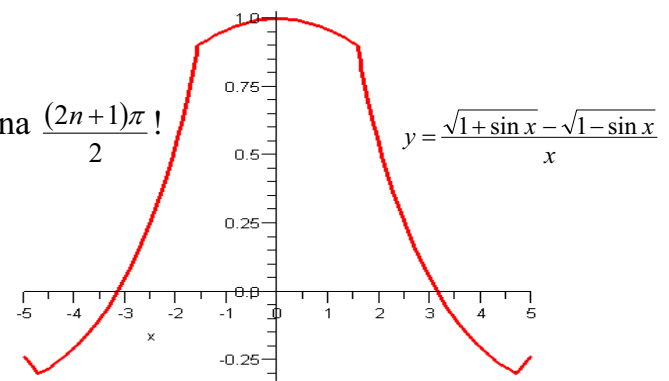


till uppgift 4:



Till **uppgift 5** (som var labbuppgift!!):

Funktionen f är inte deriverbar i punkterna $\frac{(2n+1)\pi}{2}$!



Titta närmare på punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{\pi})$
då ser du det tydligt:

