Matematik CTH&GU

Tentamensskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-10-19
kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa, **Telefon:** Elin Götmark, tel. 0762–721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är deriverbar på $\mathbb{R}$; bevisa eller motbevisa (genom att ge ett motexempel) **a)** f är jämn $\Rightarrow f'$ är udda, **b)** f är udda $\Rightarrow f'$ är jämn, **c)** f' är jämn $\Rightarrow f$ är udda, **d)** f' är udda $\Rightarrow f$ är jämn. (6p)

2. Beräkna $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x}{x}$ (L'Hospitals regel får ej användas). (4p)

3. Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|}-1}{x-1} \quad \text{för} \quad x\in\mathbb{R}\ \{1\} \quad \text{och} \quad f(1)=\tfrac{1}{2}.$$

a) Bevisa att f är kontinuerlig. I vilka punkter är f deriverbar? (5p)

b) Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)

c) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0)=0$. (7p)

4. Låt $f(x)=\arcsin(e^{-x})$.

a) Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av D_f, extrempunkter, konvexitet/konkavitet och asymptoter. Motivera även varför f är injektiv. (6p)

b) Beräkna längden av kurvbågen $y=f(x),\ 0\le x\le \ln 3$. (6p)

5. Bevisa att om $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a<b$,

$f(x)\ge 0$ för $x\in[a,b]$ och $f(x_0)>0$ för en punkt $x_0\in[a,b]$ så är $\int_a^b f(x)dx>0$. (5p)

6. **a)** Låt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a,b[$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Visa att f är växande på $]a,b[$ om och endast om $f'(x)\ge 0$ för varje $x\in\,]a,b[$. (6p)

b) Visa att $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (du får använda att $\cos(x)$ är kontinuerlig). (5p)

c) Definiera funktionen $\arctan x$ och härled dess derivata. (4p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 06

03-01-14

1.(a),(b) konvergent; **(c),(d)** divergent; **(e),(f),(h)** falskt; **(g)** sant

2.(a) 1, **(b)** e^6 **3.** lok. max: 0, lok. min: $\frac{21}{5}$, inflex.pkt: $-\frac{1}{5}, 0$, grafen:

4.(a) $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c$ **(b)** $\frac{24\pi}{5}$

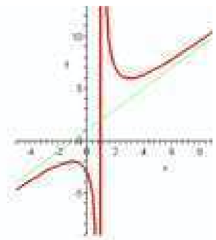
03-08-18

1.(a),(b),(e),(f),(h) konvergent; **(c),(d),(g)** divergent **2.(a)** 3, **(b)** $\frac{3}{4}$

3. asymptoter: $x = 1$, $y = x + 1$, lok. max: -1, lok. min: 3, grafen:

4.(a) $\ln(\sin^2 x + \sin x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\right)$ **(b)** π

5. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

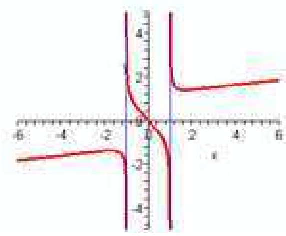


03-10-22

1.(a),(d) konvergent; **(b),(c)** divergent; **(f),(h)** deriverbar; **(e),(g)** ej deriverbar **2.(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** -1 **3.** asymptoter: $x = \pm 1$,

lok. max: $-\sqrt{3}$, lok. min: $\sqrt{3}$, infl. pkt. $-3, 0, 3$, grafen:

4.(a) $6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right) + c$ **(b)** $\frac{\pi^2-8}{32}$



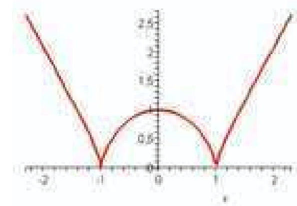
04-01-13

1.(c),(d) konvergent; **(a),(b)** divergent; **(e),(g)** finns; **(f),(h)** finns ej

2.(a) ex. ej **(b)** 0 **3.** lok.min: ± 1, infl.pkt: $\pm\sqrt{3}$, grafen:

4.(a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2 + x + 1\right) - 2x + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan\frac{4}{\sqrt{5}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **5.** $\frac{16}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$



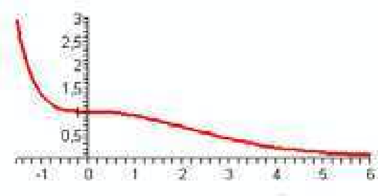
04-08-16

1.(b),(d),(e),(f),(h) konvergent; **(a),(c),(g)** divergent

2.(a) 1 **(b)** 1

3. asymptot: $y = 0$ i ∞, infl.pkt: 0 och 2, grafen:

4.(a) $\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2$ **(b)** $\frac{\pi-2}{8}$

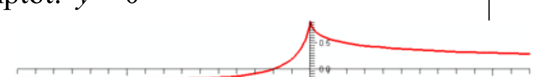


05-10-19

1. (c) falsk, övriga sanna **2.** 0 **3.a)** f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$

b) lok. minimum i $x = -3 - 2\sqrt{2}$, maximum i 0, asymptot: $y = 0$

c) $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2\arctan\sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$



4.a) $D_f = [0, \infty[$, f är strängt konvex, asymptot: $y = 0$

b) $\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$