Inledande Matematisk Analys F1

TMA970

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
1999-10-20	x	x	
2000-01-12	x	x	
2001-10-24	x	x	
2002-01-15	x	x	
2002-08-19	x	x	
2002-10-23	x		
2003-01-14	x		x
2003-08-18	x		x
2003-10-22	x		x
2004-01-13	x		x
2004-08-16	x	x	x
2004-10-20	x	x	
2005-01-11			
2005-10-19	x		x
2006-01-10	x	x	
2006-08-21	x	x	

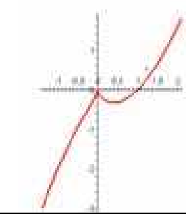
20 oktober 2006

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 06

03-01-14

1.(a),(b) konvergent; **(c),(d)** divergent; **(e),(f),(h)** falskt; **(g)** sant

2.(a) 1, **(b)** e^6 **3.** lok. max: 0, lok. min: $\frac{21}{5}$, inflex.pkt: $-\frac{1}{5}, 0$, grafen:

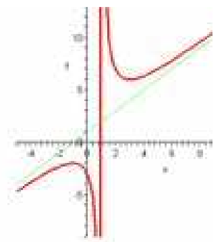


4.(a) $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c$ **(b)** $\frac{24\pi}{5}$

03-08-18

1.(a),(b),(e),(f),(h) konvergent; **(c),(d),(g)** divergent **2.(a)** 3, **(b)** $\frac{3}{4}$

3. asymptoter: $x = 1$, $y = x+1$, lok. max: -1, lok. min: 3, grafen:



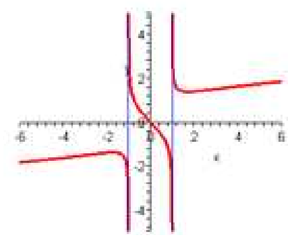
4.(a) $\ln\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\right)$ **(b)** π

5. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

03-10-22

1.(a),(d) konvergent; **(b),(c)** divergent; **(f),(h)** deriverbar; **(e),(g)** ej deriverbar **2.(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** -1 **3.** asymptoter: $x = \pm 1$,

lok. max: $-\sqrt{3}$, lok. min: $\sqrt{3}$, infl. pkt. $-3, 0, 3$, grafen:

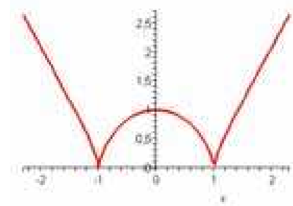


4.(a) $6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right) + c$ **(b)** $\frac{\pi^2 - 8}{32}$

04-01-13

1.(c),(d) konvergent; **(a),(b)** divergent; **(e),(g)** finns; **(f),(h)** finns ej

2.(a) ex. ej **(b)** 0 **3.** lok.min: ± 1, infl.pkt: $\pm\sqrt{3}$, grafen:



4.(a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2 + x + 1\right) - 2x + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

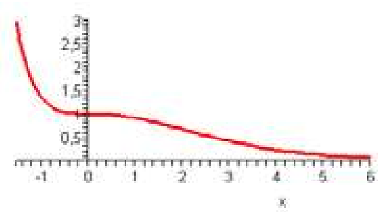
(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan\frac{4}{\sqrt{5}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **5.** $\frac{16}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

04-08-16

1.(b),(d),(e),(f),(h) konvergent; **(a),(c),(g)** divergent

2.(a) 1 **(b)** 1

3. asymptot: $y = 0$ i ∞, infl.pkt: 0 och 2, grafen:



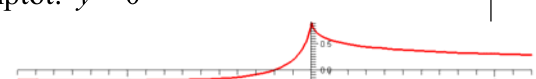
4.(a) $\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2$ **(b)** $\frac{\pi - 2}{8}$

05-10-19

1. (c) falsk, övriga sanna **2.** 0 **3.a)** f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$

b) lok. minimum i $x = -3 - 2\sqrt{2}$, maximum i 0, asymptot: $y = 0$

c) $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2\arctan\sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$



4.a) $D_f = [0, \infty[$, f är strängt konvex, asymptot: $y = 0$

b) $\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-08-21, kl. 8.30-12.30 i V
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Jonas Hartwig, tel. 0762 – 721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Avgör om följande integraler konvergerar eller divergerar. Motiver väl!

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{|x-2|}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^3 \ln|x-2|\,dx$. (8p)

2. Visa att $\arctan\frac{2x}{5} + \arctan\frac{2x}{x^2+1} = \arctan\frac{2x(x^2+6)}{x^2+5}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (6p)

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av

$D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(0)=0$ och $f(x)=\frac{\ln(\cos x)}{x}$ för $0 \neq x \in D_f$.

a) Visa att f är C^1 (dvs. f är deriverbar och f' är kontinuerlig). (8p)

b) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(0)$. (8p)

4. Låt $f(x)=\dfrac{\cosh x}{e^x \cosh 2x}$.

a) Rita funktionskurvan $y=f(x)$ med angivande av asymptoter och extrempunkter. (7p)

b) Motivera varför integralen $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent (2p) och beräkna den (6p). (8p)

5. Låt $a \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Vad menas med "a är inre punkt i D" och vad är "supremum av D"? (3p)

b) Visa att om f är deriverbar i a så är f även kontinuerlig i a. (4p)

6. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagrange's sats). (8p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-08-21

uppg. 1

Alla integraler är generaliserade i $x = 2$; vi betraktar med $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_1^{2-\frac{1}{n}} f(2-x)\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{3} f(x-2)\,dx:$$

a) Redan $\int_1^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}dx = \left[-\ln(2-x)\right]_1^{2-\frac{1}{n}}$ saknar gränsvärde då $n \to \infty$.

b) $\int_1^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{3} \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \left[-2\sqrt{2-x}\right]_1^{2-\frac{1}{n}} + \left[2\sqrt{x-2}\right]_{2+\frac{1}{n}}^{3}$

har ett gränsvärde då $n \to \infty$.

c) $\int_1^{2-\frac{1}{n}} \ln(2-x)\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{3} \ln(x-2)\,dx = [\text{part. int.}] =$

$= \left[-(2-x)\ln(2-x) - x\right]_1^{2-\frac{1}{n}} + \left[(x-2)\ln(x-2) - x\right]_{2+\frac{1}{n}}^{3}$

har ett gränsvärde då $n \to \infty$ ty $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = 0$.

<u>**svar**</u>: **a)** divergent, **b)** och **c)** konvergent

uppg. 2

Sätt $f(x) = \arctan\frac{2x}{5} + \arctan\frac{2x}{x^2+1} - \arctan\frac{2x\left(x^2+6\right)}{x^2+5}$; f är deriverbar på $\mathbb{R}$.

<u>lösning 1</u>: Visa $f' = 0$: det ger $f = c$ och $f(0) = 0$ ger då påståendet $f \equiv 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{5}}{1+\left(\frac{2x}{5}\right)^2} + \frac{\frac{2\left(x^2+1-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}}{1+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2} - \frac{\frac{2\left(\left(3x^2+6\right)\left(x^2+5\right)-2x^2\left(x^2+6\right)\right)}{\left(x^2+5\right)^2}}{1+\left(\frac{2x\left(x^2+6\right)}{x^2+5}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 5}{25+4x^2} + \frac{2\left(1-x^2\right)}{x^4+6x^2+1} - \frac{2\left(x^4+9x^2+30\right)}{x^4+10x^2+25+4x^2(x^4+12x^2+36)} =$$

$$= 2\frac{5x^4+30x^2+5+\left(1-x^2\right)\left(25+4x^2\right)}{(25+4x^2)(x^4+6x^2+1)} - 2\frac{x^4+9x^2+30}{4x^6+49x^4+154x^2+25} =$$

$$= 2\frac{x^4+9x^2+30}{4x^6+49x^4+154x^2+25} - 2\frac{x^4+9x^2+30}{4x^6+49x^4+154x^2+25} = 0 \quad \text{vsv}$$

<u>lösning 2</u>: Visa $\tan(VL) = \tan(HL)$, det ger $f(x) = n\pi$, $f(0) = 0$

[eller $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$] ger då påståendet.

Sätt $\alpha = \arctan\frac{2x}{5}$ och $\beta = \arctan\frac{2x}{x^2+1}$, då är $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} =$

$= \frac{\frac{2x}{5}+\frac{2x}{x^2+1}}{1-\frac{4x^2}{5\left(x^2+1\right)}} = \frac{2x\left(x^2+1+5\right)}{5x^2+5-4x^2} = \frac{2x\left(x^2+6\right)}{x^2+5} = \tan(HL)$ vsv.

Anm: f är udda, det räcker alltså att betrakta $x \geq 0$.

uppg. 3

$f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ för $0 \neq x \in D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ och $f(0) = 0$.

a) f är C^1 i alla punkter $0 \neq x \in D_f$ ty f är sammansatt av C^1 funktioner ($\cos x > 0$ i D_f). För origo gäller

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\ln(\cos x)-0}{x^2} = \frac{\ln\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)}{-\sin^2 x} \cdot \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

alltså är f deriverbar även i 0 med $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$,

ty $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Vidare gäller för $0 \neq x \in D_f$:

$f'(x) = \frac{-x\tan x - \ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{\sin x}{x\cos x} - \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = f'(0)$,

det visar att f' är kontinuerlig även i 0.

b) Eftersom f är udda, så räcker det att betrakta endast $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(x\tan x + \ln(\cos x)\right)$; vi visar nu att

$g(x) = x\tan x + \ln(\cos x) > 0$ för $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, det ger nämligen $f'(x) < 0$ för $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ och det ger i sin tur att f är strängt avtagande, alltså injektiv (på hela D_f): $g'(x) = x\left(1+\tan^2 x\right) + \tan x - \tan x = x\left(1+\tan^2 x\right) > 0$,

alltså är g strängt växande och således $g(x) > g(0) = 0$ för $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$Df^{-1}(0) = \frac{1}{Df(a)}$ då $f(a) = 0$, alltså $a = 0$ och $Df^{-1}(0) = \frac{1}{Df(0)} = -2$.

svar: **b)** $Df^{-1}(0) = -2$

uppg. 4

$f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1}$.

a) $f'(x) = \frac{2e^{2x}\left(e^{4x}+1\right)-\left(e^{2x}+1\right)4e^{4x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2} = 2e^{2x}\frac{e^{4x}+1-2e^{4x}-2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2} =$

$= -\frac{2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}\left(e^{4x}+2e^{2x}-1\right) = -\frac{2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}\left(\left(e^{2x}+1\right)^2-2\right) =$

$= -\frac{2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}\left(e^{2x}+1+\sqrt{2}\right)\left(e^{2x}+1-\sqrt{2}\right)$, alltså

$$f'(x)\begin{cases} >0, \text{ då } e^{2x} < \sqrt{2}-1 \text{ (dvs då } x < \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\text{)} \\ <0, \text{ då } e^{2x} > \sqrt{2}-1 \text{ (dvs då } x > \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\text{)} \end{cases},$$

f antar alltså i $x_0 = \ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ett strängt maximum $f(x_0) = \frac{\sqrt{2}-1+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1} =$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{2}$; vidare gäller $f(x) = \frac{e^{-2x}+e^{-4x}}{1+e^{-4x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ och

$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{0+1}{0+1} = 1$, dvs $y = 1$ och $y = 0$ är asymptoter (i $-\infty$ resp. i ∞).

b) Eftersom $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1} < \frac{2e^{2x}}{e^{4x}}$ för $x \geq 0$ och $\int\limits_0^\infty \frac{2}{e^{2x}}\,dx$ konvergerar,

så konvergerar även $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$. En primitiv funktion till f fås t. ex.

med substitutionen $e^{2x} = t$ $\left(2e^{2x}dx = dt\right)$: $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1}dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\frac{1}{2t}dt =$

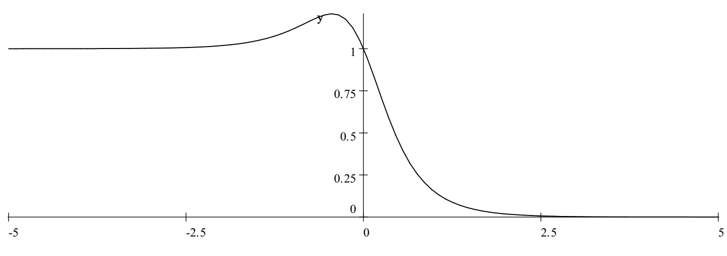
[pbu]$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} + \frac{1-t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln t + \arctan t - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + c\right),$

en primitiv funktion till f är alltså $F(x) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{4x}}}\right) + \arctan\left(e^{2x}\right)\right)$

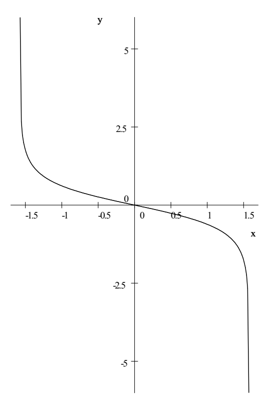
och därmed $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \underline{\frac{\pi + 2\ln 2}{8}}$ $\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{4x}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{-4x}+1}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1\right)$.

$\boxed{\textbf{svar: a) } \text{maximipunkt } \left(\frac{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right), \text{ asympt.: } y=1,\ y=0,\ \textbf{b) } \frac{\pi+2\ln 2}{8}}$



$y = f(x)$ i uppg. 4a



$y = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ (uppg.3)

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-01-10, kl. 14.00-18.00 i V
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Johan Jansson och Peter Lindroth, tel. 0762 – 721860 och 0762 – 721861
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x)=x^{\arctan x}$. Beräkna

a) $f'(1)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ (enbart standardgränsvärden får användas). (6p)

2. Visa att $f(x)=x+\cos x$ är injektiv och beräkna $Df^{-1}(1)$ (derivatan av f^{-1} i punkten 1). (7p)
Ange även f:s inflexionspunkter.

3. Låt $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ och

$D_1=\{(x,y):0\le x\le \frac{1}{2},\ 0\le y\le f(x)\}$, $D_2=\{(x,y):\frac{3}{2}\le x\le 8,\ 0\le y\le f(x)\}$.

a) Beräkna arean av området D_1 och arean av området D_2. (3p)

b) Visa att D_1 och D_2 har lika stor area. (4p)

4. Bestäm a så att kedjelinjen $y=\cosh x, -a\le x\le a$ här längden 2 (längdenheter). (7p)

5. Låt $f(x)=\dfrac{32}{(x+2)^4-16}$.

a) Utveckla $(x+2)^4$ med hjälp av binomialteoremet. (2p)

b) Partialbråksuppdela $f(x)$. (3p)

c) Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (7p)

d) Motivera varför den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent

d1) utan att beräkna den (2p) **d2)** genom att beräkna den (5p). (7p)

6. Låt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara deriverbar. Visa att om f antar ett lokalt extremvärde i en punkt x_0 så är $f'(x_0)=0$. Gäller omvändningen? (7p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner. (7p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen i inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-01-10

uppg. 1

$f(x) = x^{\arctan x} = e^{\arctan x \ln x} = e^{\frac{\arctan x}{x}(x \ln x)} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} e^{1\cdot 0} = 1$ (standardgränsvärden och e^x är kontinuerlig) och $f'(x) = e^{\arctan x \ln x}\left(\frac{\arctan x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$, alltså är $f'(1) = e^0\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\textbf{svar}\text{:}\textbf{a)}\ Df(1) = \frac{\pi}{4},\ \textbf{b)} \lim_{x\to 0+} f(x) = 1}$$

uppg. 2

$f(x) = x + \cos x \implies f'(x) = 1 - \sin x > 0$ i alla intervall $\left]\frac{(4n+1)\pi}{2}, \frac{(4n+5)\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$, alltså är f strängt växande i alla dessa intervall och därmed strängt växande, och således injektiv, på hela $\mathbb{R}$. $f(0) = 1$, alltså är $Df^{-1}(1) = \frac{1}{Df(0)} = 1$. Vidare är $x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $[n \in \mathbb{Z}]$ lok. extrempunkter av f' alltså inflexionspunkter av f $(f''(x_n) = -\cos x_n = 0$, f" byter tecken i $x_n)$.

$$\boxed{\textbf{svar}\text{: } Df^{-1}(1) = 1,\ \frac{(2n+1)\pi}{2}\ [n \in \mathbb{Z}] \text{ är inflexionspunkter}}$$

upp. 3

Områdena har arean $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan\frac{1}{2}$ resp. $\int_{\frac{3}{2}}^{8} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan 8 - \arctan\frac{3}{2}$.

Vi skall nu visa att $\arctan\frac{1}{2} = \arctan 8 - \arctan\frac{3}{2}$, dvs $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{3}{2} = \arctan 8$: sätt $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$, $\beta = \arctan\frac{3}{2}$, då är $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ och $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{8}{1}$, det ger $\alpha + \beta = \arctan 8 + n\pi$; men eftersom $0 < \alpha + \beta < \pi$ så är $n = 0$ vsv.

upp. 4

Längden är $\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \sinh^2(x)}dx =$ [jämn integrand]

$= 2\int_0^a \cosh x dx = 2\sinh a \overset{!}{=} 2 \implies e^a - e^{-a} = 2 \implies (e^a)^2 - 2e^a - 1 =$

$(e^a-1)^2-2=0 \implies e^a=1+\sqrt{2}$ $[1-\sqrt{2}<0$, alltså ej lösning$]$
$\implies a=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } a=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$

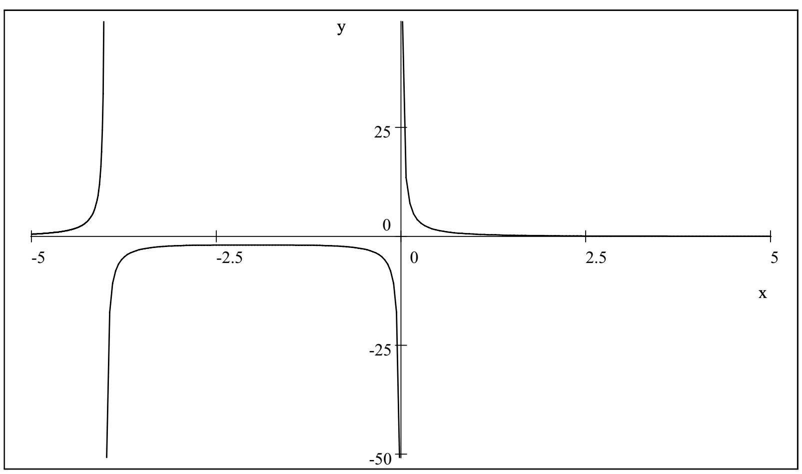
upp. 5

a) $(x+2)^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}2^k=x^4+4x^3\cdot 2+6x^2\cdot 4+4x\cdot 8+16=$
$\underline{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$.

b) $\frac{32}{(x+2)^4-16}=\frac{32}{\left((x+2)^2+4\right)\cdot\left((x+2)^2-4\right)}=4\left(\frac{1}{(x+2)^2-4}-\frac{1}{(x+2)^2+4}\right)=$
$=4\left(\frac{1}{(x+2+2)(x+2-2)}-\frac{1}{(x+2)^2+4}\right)=\underline{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}-\frac{4}{(x+2)^2+4}}$.

c) Man ser direkt (eller på partialbråksuppdelningen) att $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,-4\}$, $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, $f(x)\to\infty$ då $x\to 0+$, $x\to -4-$ och $f(x)\to -\infty$ då $x\to 0-$, $x\to -4+$, dvs $y=0$, $x=-4$ och $x=0$ är asymptoter.
$f'(x)=32\frac{-4(x+2)^3}{\left((x+2)^4-16\right)^2}\begin{cases}>0, & \text{då } x<-2\\ <0, & \text{då } x>-2\end{cases}$, $f(-2)=-2$ är alltså ett strängt lokalt maximum (globala max-min och sneda asymptoter saknas).

$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: asymptoter: } y=0,\ x=-4,\ x=0\text{; lok. max. i } (-2,-2)}$



d) $\int_1^\infty \frac{32}{(x+2)^4-16}dx$ är konvergent, ty för $x\geq 1$ är enligt a)

$0 \le \frac{32}{(x+2)^4-16} = \frac{32}{x^4+8x^3+24x^2+32x} < \frac{32}{x^4}$ och $\int\limits_1^{\infty} \frac{32}{x^4}dx$ är konvergent.

Beräkning: enligt b) är $\int\limits_1^{\infty} \frac{32}{(x+2)^4-16}dx = \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\right) dx =$

$= \left[\ln x - \ln(x+4) - 2\arctan\frac{x+2}{2}\right]_1^{\infty} =$

$= \lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln\frac{N}{N+4} - 2\arctan\frac{N+2}{2}\right) - \left(-\ln 5 - 2\arctan\frac{3}{2}\right) = \underline{-\pi + \ln 5 + 2\arctan\frac{3}{2}}$

$(\lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln\frac{N}{N+4}\right) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln\frac{1}{1+\frac{4}{N}}\right) = \ln 1 = 0).$

Matematik CTH&GU

Tentamensskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-10-19
kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa, **Telefon:** Elin Götmark, tel. 0762–721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar på $\mathbb{R}$; bevisa eller motbevisa (genom att ge ett motexempel) **a)** f är jämn $\Rightarrow f'$ är udda, **b)** f är udda $\Rightarrow f'$ är jämn, **c)** f' är jämn $\Rightarrow f$ är udda, **d)** f' är udda $\Rightarrow f$ är jämn. (6p)

2. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x}$ (L'Hospitals regel får ej användas). (4p)

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - 1}{x - 1} \quad \text{för} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{och} \quad f(1) = \tfrac{1}{2}.$$

a) Bevisa att f är kontinuerlig. I vilka punkter är f deriverbar? (5p)
b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)
c) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0) = 0$. (7p)

4. Låt $f(x) = \arcsin(e^{-x})$.

a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av D_f, extrempunkter, konvexitet/konkavitet och asymptoter. Motivera även varför f är injektiv. (6p)
b) Beräkna längden av kurvbågen $y = f(x)$, $0 \le x \le \ln 3$. (6p)

5. Bevisa att om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$f(x) \ge 0$ för $x \in [a,b]$ och $f(x_0) > 0$ för en punkt $x_0 \in [a,b]$ så är $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. (5p)

6. **a)** Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a,b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Visa att f är växande på $]a,b[$ om och endast om $f'(x) \ge 0$ för varje $x \in]a,b[$. (6p)
b) Visa att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (du får använda att $\cos(x)$ är kontinuerlig). (5p)
c) Definiera funktionen $\arctan x$ och härled dess derivata. (4p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1
Datum: 2005-08-15, kl. 8.30-12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Christoffer Cromvik, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\text{(a)} \int_0^1 x e^{\frac{1}{x}} dx; \quad \text{(b)} \int_1^\infty e^{\frac{1}{x}} dx; \quad \text{(c)} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}; \quad \text{(d)} \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{(e)} \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{(f)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}; \quad \text{(g)} \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{2+x}}; \quad \text{(h)} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x} \quad \text{(4p);} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \quad \text{(4p).}$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = 5x^{\frac{2}{5}}e^x$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. (4p)

5. Finn alla funktioner $f(x)$ sådana att $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$. (5p)

6. Låt $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Visa att om integralen $\int_1^\infty f^2(x)dx$ konvergerar, så konvergerar även integralen $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$. Ge ett exempel som visar att det omvända påståendet inte är sant. (7p)

7.(a) Visa att derivatan av $\sin x$ är $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)

(b) Härled derivatan av $\arcsin x$. (3p)

8.(a) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

(b) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall, men endast deriverbar i det öppna intervallet (funktionen betraktas som deriverbar i ändpunkterna om den har vänster/högerderivata i dem). (2p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

Inledande matematisk analys F (TMA 970)

Lösningar 1/8-2005

(1.) (a) divergent; (b) divergent;
(c) divergent; (d) divergent;
(e) konvergent; (f) konvergent;
(g) konvergent; (h) divergent.

(2.) (a)

$$\frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x} = \sqrt{\frac{1-\cos^2(x^2)}{1+\cos(x^2)}} \cdot \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2(x^2)}}{\sin^2 x} \cdot \frac{1+\cos x}{\sqrt{1+\cos(x^2)}} = \quad (\sqrt{x^4} = x^2)$$

$$= \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2(x^2)}{x^4}} \cdot \frac{1+\cos x}{\sqrt{1+\cos(x^2)}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(b)

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}$$

(3.) $f(x) = 5x^{2/5}e^x$, $D_f = \mathbb{R}$

inga symmetrier

$f \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; $f(0)=0$ ($\Rightarrow$ min i 0)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (standard)

$\Rightarrow$ vågrät asymptot $y=0$ i $-\infty$

(2)

$$\frac{f(x)}{x} = 5\,\frac{e^x}{x^{3/5}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \Rightarrow \text{ ingen asymptot i } +\infty$$

$$f'(x) = x^{-3/5}e^x(2+5x) \qquad x \neq 0$$

$f' = 0: \quad x = -2/5$

x		$-2/5$		0	
f'	$+$	0	$-$	$\mid$	$+$

$\Rightarrow f$ har lok. max i $-2/5$
lok. (globalt) min i 0

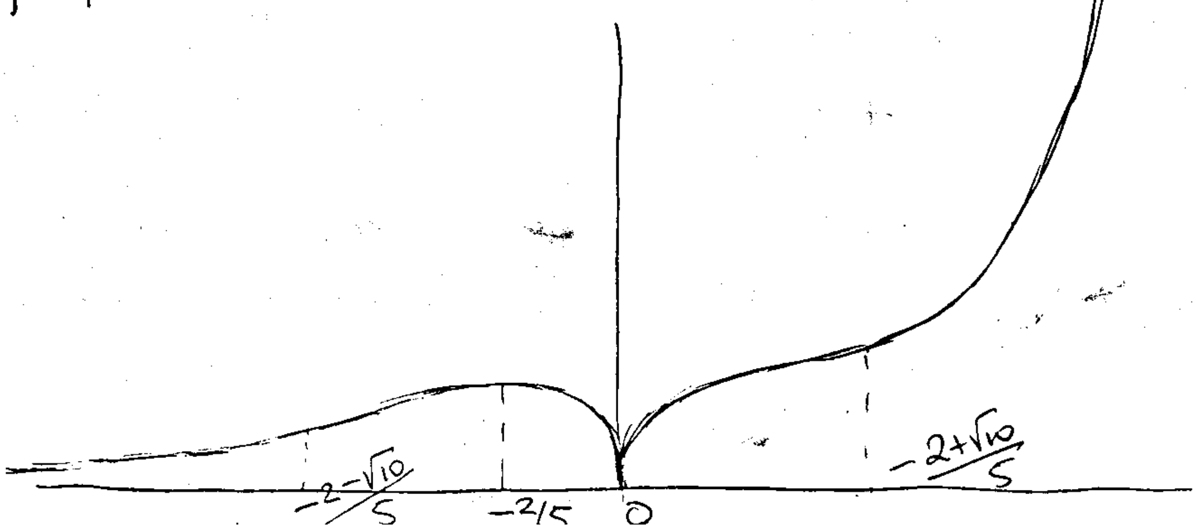
$$f''(x) = \frac{1}{5}x^{-8/5}e^x(-6+20x+25x^2), \; x \neq 0$$

$f'' = 0: \quad \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{5}$

x		$\frac{-2-\sqrt{10}}{5}$		0		$\frac{-2+\sqrt{10}}{5}$	
f''	$+$	0	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ inflexion i $\dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{10}}{5}$		$-2/5$		0		$\frac{-2+\sqrt{10}}{5}$		$+\infty$
f	$\to 0$	↗		↗	lok. max	↘	0 lok. min	↗		↗	
f'		$+$			0	$-$	$-\infty \mid +\infty$		$+$		
f''		$+$	0		$-$		$\mid$	$-$	0		$+$



4. (a) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{\cancel{1-x+1+x}}{(1-x)^{\cancel{2}}}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2 \pm 1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \int\frac{dx}{1-x^2} \overset{*}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (+C)$$

(* notera att vi ovan behövde derivera $\ln\frac{1+x}{1-x}$ och fick $2\cdot\frac{1}{1-x^2}$; annars kan man partialbråksuppdela)

(b) $$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \begin{bmatrix} 1-x = t^2 \\ x = 1-t^2 \\ dx = -2t\,dt \\ x=0:\ t=1 \\ x=1:\ t=0 \end{bmatrix} =$$

$$= -2\int_1^0 \frac{\cancel{t}}{(1+t^2)\cancel{t}}\,dt = 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\big[\arctan t\big]_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

---

5. Sätt $t = \sin^2 x \in [0,1]$; vi får då

$$f'(t) = 1-t$$

$$f(t) = t - \frac{t^2}{2} + C \quad \text{för } t\in[0,1]$$

Notera att f kan vara godtycklig utanför $[0,1]$, det enda kravet är att den är deriverbar i "skarvpunkterna" 0 o 1, samt i $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

6. $(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ 4

$$\Rightarrow \quad ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Eftersom både $\int_1^\infty f^2(x)\,dx$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergerar, får vi att den givna integralen är absolut-konvergent, och därmed även konvergent (enligt jämförelsekriteriet).

Betrakta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ konvergent,

men $\int_1^\infty f^2(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergent.

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1
Datum: 2004-10-20, kl. 14.00-18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 0739-779268, besöker tentamen ca 15.00 och ca 17.00.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_{-\infty}^{0} x^9 e^x\,dx$; **(b)** $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$; **(c)** $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; **(d)** $\int_0^1 \ln x\,dx$.

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt. (Funktionen f antas vara deriverbar i $\mathbb{R}$.)

(e) Om f är strängt växande i $\mathbb{R}$, så gäller $f' > 0$ i $\mathbb{R}$.
(f) Om $f' > 0$ i $\mathbb{R}$, så är f strängt växande i $\mathbb{R}$.
(g) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
(h) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x\to 0+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (4p); **(b)** $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ (4p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_1^2 \sin(\ln x)\,dx$. (4p)

5. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$. (6p)

6. Funktionen f är två gånger deriverbar i $\mathbb{R}$ och sådan att $f'' \geq 0$ i $\mathbb{R}$. Visa att

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \qquad (7p)$$

7.(a) Formulera och bevisa satsen om derivatan av en invers funktion. (6p)
(b) Härled derivatan av $\arctan x$ (givet derivatan av tan). (3p)

8.(a) Formulera regeln för derivata av en produkt. (1p)
(b) Formulera och bevisa satsen om partiell integration (för obestämda integraler). (5p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

Inledande matematisk analys F
TMA 970

20/10 - 2004

Lösningar

1. (a) konvergent ; (b) divergent ;
OBS! $\sqrt{3-x^2}$ (c) konvergent ; (d) konvergent ;
(e) falskt ; (f) sant ;
(g) falskt ; (h) falskt

---

2. (a) $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{x(\ln(x+1)-\ln x)} =$$
$$= e^{x\ln(x+1)} \cdot e^{-x\ln x} \xrightarrow[x\to 0_+]{} e^0 \cdot e^0 = 1,$$
ty $x\ln x \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$.

(b) $$\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{(9+2x-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} =$$
$$= \frac{2\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x-8)}(\sqrt{9+2x}+5)} \xrightarrow[x\to 8]{} \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

---

3. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$, $D_f : x \neq 1$

$f(x) = 0$ endast för $x = 0$
$f(x) > 0$ för $x > 1$; $f(x) \leq 0$ för $x < 1$
($\Rightarrow$ f har lok. max i 0)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^3-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \text{"}\frac{1}{-0}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \text{"}\frac{1}{+0}\text{"} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 1$ är vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4}{x^4 - x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$f(x) - x = \frac{\cancel{x^4} - \cancel{x^3 \cdot x} + x}{x^3 - 1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ f har sned asymptot $y = x$ i $\pm\infty$

f är varken jämn eller udda; ej heller periodisk

$$f'(x) = \frac{\cancel{4}x^6 - 4x^3 - \cancel{3x^6}}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$$

x		0		1		$\sqrt[3]{4}$	
f'	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$

$f' = 0$ i $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$

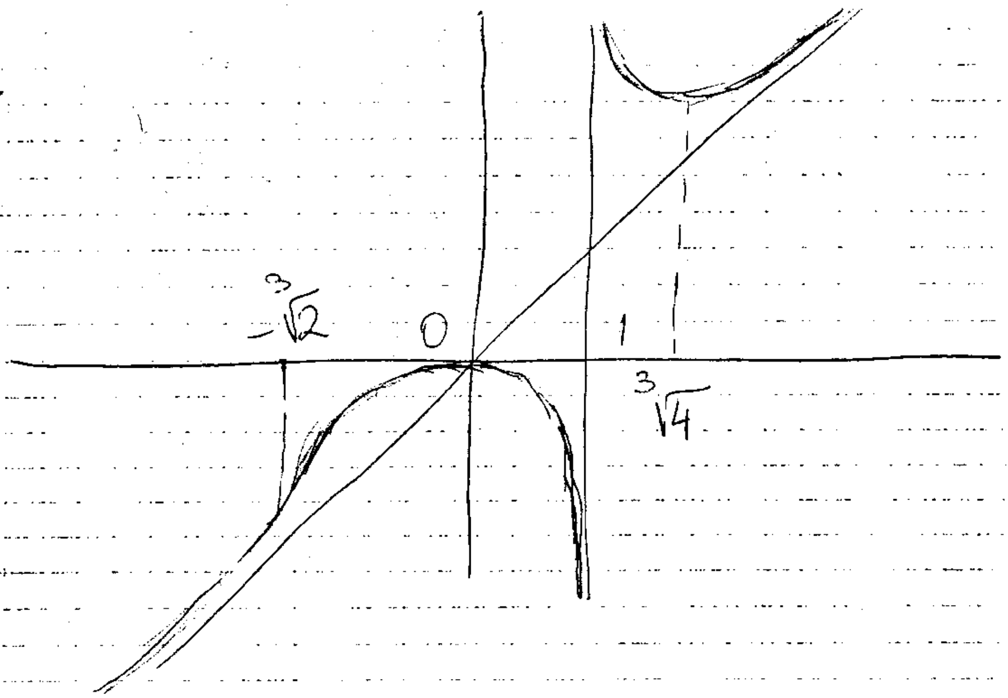
$\Rightarrow$ f har lok. max i 0, lok. min i $\sqrt[3]{4}$

$$f''(x) = 6\,\frac{x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

x		$-\sqrt[3]{2}$		0		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	|	$+$

$\Rightarrow$ inflexion i $-\sqrt[3]{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
f	$-\infty$ $y=x$	infl.		lok. max 0	$-\infty$	|	$+\infty$	lok. min	↗	$+\infty$ $y=x$
f'	$+$	$+$		0	$-$	|	$-$	0	$+$	
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	|	$+$		$+$	



4 (a) $\dfrac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} =$

$$= \frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$

$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + $$
$$+ (Cx+D)(x-2)^2$$

$x=2$: $\quad 1 = B$

x^3: $\quad 0 = A + C \Rightarrow C = -A$

x^2: $\quad 0 = -6A + B - 2C + D$

$x^0\ (x=0)$: $\quad 1 = -10A + 5B + 4D$

$$\left| \begin{array}{l} 4A - D = 1 \\ 10A - 4D = 4 \end{array} \right| \cdot (-4)\ +$$

$$-6A = 0 \quad A = 0 \quad D = -1$$
$$C = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} -$$
$$- \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) \quad (+C)$$

(b) $$\int_1^2 1\cdot\sin(\ln x)\,dx = \Big[x\sin(\ln x)\Big]_1^2 -$$

$$- \int_1^2 \cancel{x}\cos(\ln x)\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= 2\sin(\ln 2) - 0 - \Big[x\cos(\ln x)\Big]_1^2 -$$

$$- \int_1^2 \cancel{x}\sin(\ln x)\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sin(\ln x)\,dx = \sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{2}$$

---

5. $$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$

D_f : $x \neq 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \equiv 0 \quad \text{i } (-\infty, 1) \text{ odn i } (1, \infty)$$

$$\Rightarrow f \equiv C_1 = \frac{\pi}{4} \text{ i } (-\infty,1) \ ; \ f \equiv C_2 = -\frac{3\pi}{4} \text{ i } (1,\infty)$$

c) $\circledast = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) =$ (5)

$$= \frac{1}{2}\left(f(x_1) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} f'(\xi_1)\left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f'(\xi_2)\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) =$$

(Medelvärdessatsen)

$$= \frac{1}{2} f'(\xi_1) \frac{x_1-x_2}{2} + \frac{1}{2} f'(\xi_2) \frac{x_2-x_1}{2},$$

där ξ_1 är mellan x_1 och $\frac{x_1+x_2}{2}$

ξ_2 — " — $\frac{x_1+x_2}{2}$ och x_2

(vi antar att $x_1 \neq x_2$, eftersom olikheten uppenbarligen gäller då $x_1 = x_2$)

Utan inskränkning $x_1 < x_2$; då har vi att $x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2$

$f'' \geq 0 \Rightarrow f'$ växande $\Rightarrow f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$

$$\Rightarrow \circledast = \frac{1}{4}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\underbrace{\left(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ olikheten är sann $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2004-08-16, kl. 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Mikael Persson, tel. 0739-779268, Jonas Hartwig, tel. 0762-186654.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\ln x+1}$; **(b)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^{2\ln x}+1}$; **(c)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^p}$; **(d)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Avgör om följderna nedan konvergerar eller divergerar när $n \to \infty$. Ge endast svar, d.v.s. konvergerar / divergerar.
(e) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;
(f) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = \frac{\cos n}{n}$;
(g) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$;
(h) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2}{x^2-1})^x$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (1+x+\frac{x^2}{2})\,e^{-x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\, dx$. (4p)

5. Visa att $\frac{x-1}{\sqrt{x}} > \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ för alla $x > 1$. (6p)

6. Givet är den kontinuerliga funktionen $f : [a,b] \to [a,b]$. Visa att ekvationen $x = f(x)$ har åtminstone en rot i intervallet $[a,b]$. (6p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i sammma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8.(a) Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)
(b) Finn $\lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(x^2)\,dx$. (2p)

Inledande matematisk analys F1 (TMA 970)

16/8 - 04

Lösningar

1. (a) divergent ; (b) konvergent ;
(c) divergent ; (d) konvergent ;
(e) konvergerar ; (f) konvergerar ;
(g) divergerar ; (h) konvergerar .

---

2. (a)
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{(\cancel{1}+x-\cancel{1}-x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(\cancel{1}+x-\cancel{1})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} =$$
$$= \frac{(1-x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

(b)
$$\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^x =$$
$$= e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)} = e^{\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2-1}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

$0 \leftarrow \frac{x}{x^2-1}$, $\quad \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2-1}} \to 1$

---

3. $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+2)e^{-x} = \frac{1}{2}\left((x+1)^2+1\right)e^{-x}$$

$\rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde)

2

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \Rightarrow \text{ingen asymptot i } -\infty$$

(horisontell i $+\infty$)

$$f'(x) = (1+x)e^{-x} - \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$; $f' \leq 0 \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow f$ avtagande i $\mathbb{R}$

inga lokala extrema

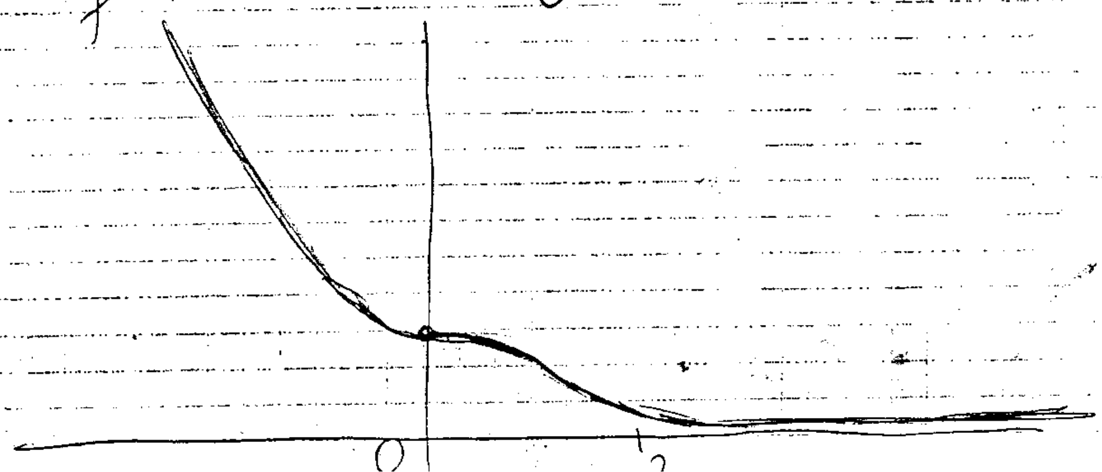
$$f''(x) = -xe^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}x(x-2)$$

x		0		2	
f''	+	0	−	0	+

$\Rightarrow x_1 = 0$ & $x_2 = 2$ inflexionspkter

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0
f'	−	−	0	−		−	
f''	+	+	0	− −	0	+	+



4. (a) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx =$

$= \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\arctan t}{\cancel{t}(1+t^2)} \cdot 2\cancel{t}\,dt =$

$= 2\int \arctan t\,(\arctan t)'\,dt =$

$= (\arctan t)^2 \ (+C) = (\arctan\sqrt{x})^2 \ (+C)$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} +$

$+ \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{2}x\cos 2x\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot 0 + 0 + \frac{1}{2}\left[x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} -$

$- \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1 - 0 +$

$+ \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + 0 - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$

---

5. Taq $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$. Da°

$f(1) = 0 - 0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(\cancel{x}+1) - 1\cdot 2(\cancel{x}-1)}{(x+1)^2} =$

$= \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \quad \forall x > 1$

$\Rightarrow f > 0 \quad \forall x > 1$

Tag $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$ (4)

Då

$$g(1) = 0 \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot x^{-3/2} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow g > 0 \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 1$$

---

6. Sätt $F(x) = f(x) - x$

$$F(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$$

$$F(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$$

Om $F(a) = 0$ eller $F(b) = 0$ har vi hittat (åtminstone) en rot till $x = f(x)$ i $[a,b]$. Om $F(a) > 0$ och $F(b) < 0$ kommer ekvationen $F(x) = 0$ ($\Leftrightarrow x = f(x)$) att ha åtminstone en rot i (a,b) enligt satsen om mellanliggande värden.

---

8 (b)

$$\left| \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(x^2)\,dx \right| = \left| \sin(\xi_n^2)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \right| \qquad \sqrt{n} \leq \xi_n \leq \sqrt{n+1}$$

$$\leq 1 \cdot \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2004-01-13, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Axel Målqvist, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)}\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{x+1}\,dx; \quad \textbf{(b)}\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x^2)}; \quad \textbf{(c)}\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}; \quad \textbf{(d)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

Avgör om gränsvärdena nedan finns. Ge endast svar, d.v.s. finns / finns ej.

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-1}\right)^{2x^2+1}$;
(f) $\lim_{x\to-\infty}\sin x$;
(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x+x^2)}{1-\cos x}$;
(h) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger −1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (l'Hospitals regel får inte användas)

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{1-\cos 2x}$; (3p)

(b) $\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$. (5p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x)=\ln(x^2+x+1)$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$. (4p)

5. Beräkna längden av kurvan som ges av $y^2=x^3,\ x\in[0,4]$. (7p)

6. Givet är att funktionen f är två gånger deriverbar i $\mathbb{R}$ samt att $\lim_{x\to\infty}f(x)=$ $=\lim_{x\to\infty}f''(x)=0$. Visa att $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. (7p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens (analysens, Newton-Leibniz) huvudsats. (7p)

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2003-10-22, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Mats Kjaer, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x+1}\,dx; \quad \textbf{(b)} \int_1^\infty \frac{dx}{\ln(x^2)+1}; \quad \textbf{(c)} \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{dx}{8x^3-1}; \quad \textbf{(d)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Avgör om funktionerna nedan är deriverbara i $x_0 = 0$. Ge endast svar, d.v.s. deriverbar / ej deriverbar.

(e) $f(x) = |x| + 1$;
(f) $f(x) = x|x| + 1$;
(g) $f(x) = \ln|x|$;
(h) $f(x) = |x|^3 + 1$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^6+x^3+1} - \sqrt{x^6-x^3+1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x\,dx$. (4p)

5. Visa att ekvationen $x - a\sin x = 5$, där $0 < a < 1$, har en enda reell rot. (6p)

6. Givet är att funktionen f är deriverbar i intervallet (a, ∞) och sådan att $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (OBS! Du får inte använda L'Hospitals regel!) (6p) Ge exempel på en funktion g sådan att g är deriverbar, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, men för vilken $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ inte existerar. (1p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1
Datum: 2003-08-18, kl. 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Elin Götmark, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^7}\,dx$; **(b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; **(c)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^4}$; **(d)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; **(f)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; **(g)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+x}$; **(h)** $\displaystyle\int_0^1 x^3\ln x\,dx$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (utan att använda l'Hospitals regel)

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+x}}{2x-\sqrt{x^2+x}}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x\sin 2x}$. (5p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{\sin 2x}{2+\sin x-\cos^2 x}$. (6p)

(b) Beräkna $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. (4p)

5. Beräkna längden av kurvbågen $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$. (6p)

6. Funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$ och grafen till f ligger i vinkeln mellan de räta linjerna $y = kx$ och $y = -kx$ $(0 < k < \infty)$ för alla x i intervallet $(0,\epsilon)$. Visa att $\lim_{x\to 0_+} x^{f(x)} = 1$. (6p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion (i en punkt). (1p)

(b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Ge exempel som visar att det omvända förhållandet inte är sant. Motivera noga! (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats (valfri variant). (7p)

/JM

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2002
Datum: 2003-01-14, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}; \quad \textbf{(b)} \int_0^1 x \ln x\, dx; \quad \textbf{(c)} \int_0^\infty \frac{(x-1)\, dx}{\sqrt{x^4+1}}; \quad \textbf{(d)} \int_1^\infty \frac{dx}{x \ln x + 1}.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.
(e) Om funktionerna f, g är deriverbara på I och $f > g$ på I, så gäller $f' \geq g'$ på I.
(f) Funktionen $\ln|1-\sqrt{x}|$ är deriverbar i sin definitionsmängd.
(g) Om funktionen f är udda på $[-a, a]$, så är dess derivata f' jämn på $[-a, a]$.
(h) Om f:s derivata f' är jämn på $[-a, a]$, så är funktionen f udda på $[-a, a]$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (utan att använda l'Hospitals regel)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} \quad (3\text{p}); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} \quad (5\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$. (5p)

(b) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när det begränsade området mellan kurvorna $x = y^2$ och $8y = x^2$ roterar kring x-axeln. (4p)

5.(a) Visa att funktionen $\cos\frac{1}{x}$ saknar gränsvärde när $x \to 0$. (3p)
(b) Visa att funktionen $x \cos\frac{1}{x}$ har gränsvärde när $x \to 0$. (3p)

6.(a) Visa att integralen $\int_0^1 x^k \ln^n x\, dx$ är konvergent $\forall k, n \in \mathbb{N}$. (2p)
(b) Visa att $\int_0^1 x^k \ln^n x\, dx = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$ $\quad \forall k, n \in \mathbb{N}$. (6p)

7.(a) Visa att derivatan av $\sin x$ är $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)
(b) Härled derivatan av $\arcsin x$. (3p)

8. Formulera och bevisa intervallinkapslingssatsen. (7p)

/JM

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2002
Datum: 2002-10-23, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^4}{x^3+1}\,dx$; **(b)** $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}\,dx$; **(c)** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4-1}$; **(d)** $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.
(e) Om funktionen f är deriverbar i punkten x_0, så är f kontinuerlig i x_0.
(f) Om funktionen f ej är deriverbar i punkten x_0, så är f diskontinuerlig i x_0.
(g) Om funktionen f är kontinuerlig på $[a,b]$, så är f begränsad på $[a,b]$.
(h) Om funktionen f är begränsad på $[a,b]$, så är f kontinuerlig på $[a,b]$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\sin^2 x)}{x^2}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4-x^2+1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = 6x^{1/3}+3x^{4/3}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \arctan\sqrt{x}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+8}dx$. (5p)

5. Förklara varför funktionen $f(x) = |x|$ har en primitiv på $\mathbb{R}$. (2p) Finn en primitiv till funktionen $f(x) = |x|$. Motivera väl! (5p)

6. Låt funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på intervallet $[0,\infty)$ och deriverbar på $(0,\infty)$. Låt dessutom $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Visa att det finns en punkt $\xi > 0$ sådan att $f'(\xi) = 0$. (Du får använda medelvärdessatsen.) (7p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(b) Formulera och bevisa satsen om derivatan av en invers funktion. (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens (analysens) huvudsats. (7p)

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001
Datum: 2002-08-19, kl. 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om gränsvärdena (a) - (d) finns, resp. om integralerna (e) - (h) konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. finns / finns ej resp. konvergent / divergent. (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$; (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$; (c) $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x}+\sin x)$; (d) $\lim_{x\to 0} x\sin^2\frac{1}{x}$;

(e) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}dx$; (f) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; (g) $\int_0^\infty \frac{dx}{2x^2+1}$; (h) $\int_0^1 x(\ln x)^2\,dx$.

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm parametern a så att ekvationen $\ln x - ax^2 = 0$ har exakt en rot. (4p)

(b) Beräkna $\int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,dx$. (4p)

5. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx. \qquad (6p)$$

6. Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

är oändligt många gånger deriverbar. (8p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(c) Vad finns det för samband mellan deriverbarhet och kontinuitet? Stöd dina påståenden med bevis resp. motexempel. Motivera noga! (5p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats. (7p)

Inledande matematisk analys

TMA970 F1

19/8 – 02

Lösningar

1. (a) finns; (b) finns; (c) finns ej; (d) finns; (e) divergent; (f) divergent; (g) konvergent; (h) konvergent

---

2. (a)
$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cancel{1-\cos^2 x}^{\,1}}{\cancel{\sin^2 x}(1+\cos x)}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(b)
$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

---

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -1-0} f(x) = "\frac{1}{-0}" = -\infty$;

$\lim_{x \to -1+0} f(x) = "\frac{1}{+0}" = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Asymptoter: $x = -1$ vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4}{(1+x)^3 x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

$$f(x) - 1\cdot x = \frac{x^4}{(1+x)^3} - x =$$

$$= \frac{\cancel{x^4} - x - 3x^2 - 3x^3 - \cancel{x^4}}{(1+x)^3} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -3$$

$\Rightarrow$ $y = x - 3$ sned asymptot i $\pm\infty$

Nollställen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lokala extrema etc:

$$f'(x) = \frac{4x^3(1+x)^{\cancel{3}} - 3\cancel{(1+x)^2}x^4}{(1+x)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3}{(1+x)^4} = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$$

$f' = 0$ i $x = -4$ & $x = 0$

$f' > 0$ för $x < -4$ & $x > 0$

$f' < 0$ för $x \in (-4, 0) \setminus \{x = -1\}$

f har lok. max i -4; lok. min i 0

$\Rightarrow$ f växande i $(-\infty, -4)$ & i $(0, \infty)$

f avtagande i $(-4, -1) \cup (-1, 0)$

Konvexitet etc:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 12x^2)(1+x)^{\cancel{4}} - 4\cancel{(1+x)^3}x^3(x+4)}{(1+x)^{\cancel{8}\,5}} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} + \cancel{4x^4} + 12x^2 + \cancel{12x^3} - \cancel{4x^4} - \cancel{16x^3}}{(1+x)^5}$$

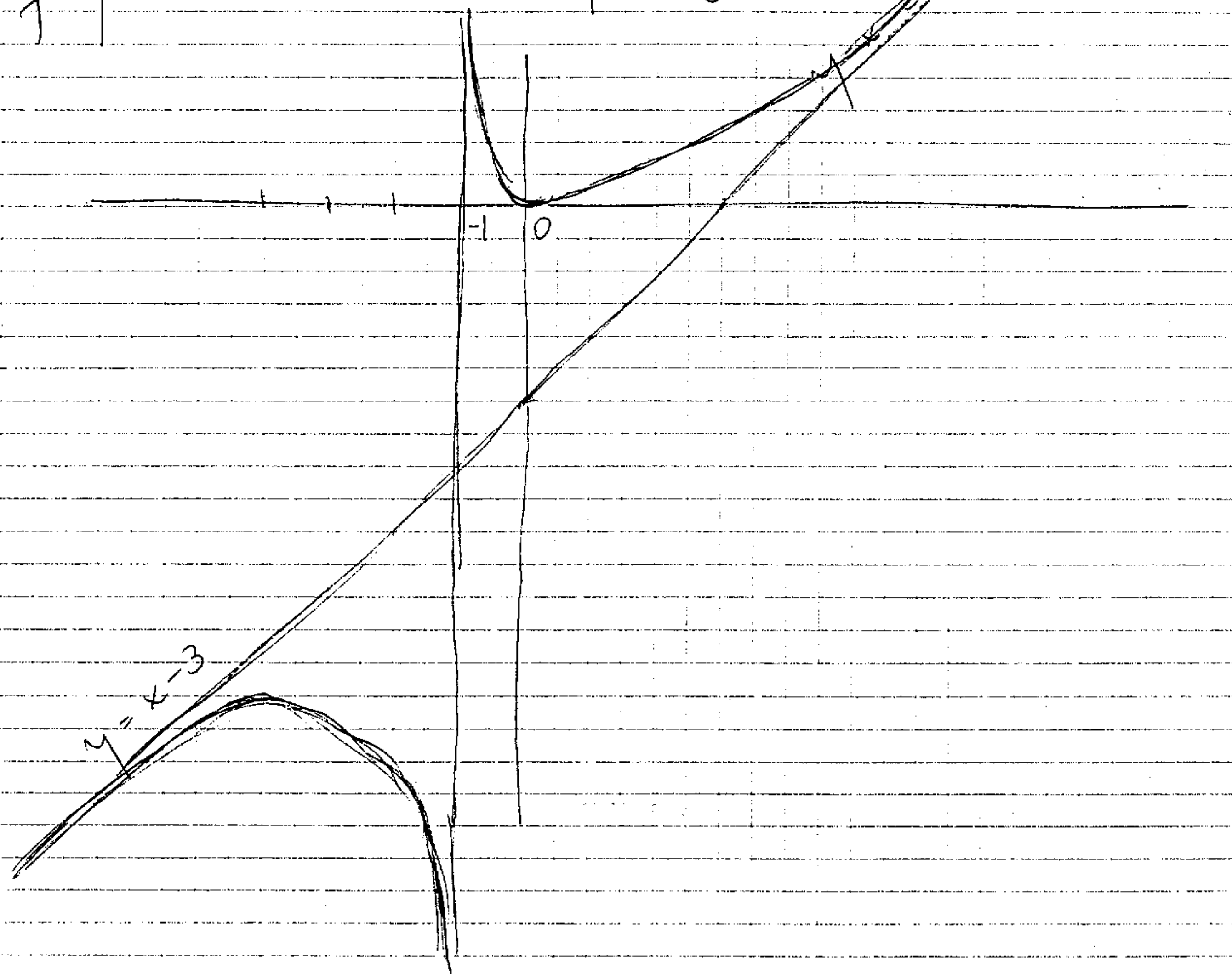
$f'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f'' < 0$ i $(-\infty, -1)$

$f'' \geq 0$ i $(-1, \infty)$

$\Rightarrow$ f konkav i $(-\infty, -1)$; konvex i $(-1, \infty)$

3

x	$-\infty$		-4		-1		0			$+\infty$
f	$y=x-3$, $-\infty$	$\nearrow$	lok. max <0	$\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$y=x-3$, $+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
f''		$-$	$-$	$-$		$+$	0	$+$	$+$	$+$



4. (a) Låt $f(x) = \ln x - ax^2 \quad (x>0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$$

$$f'=0 \iff 2ax^2 = 1 \quad (x>0)$$

$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad \text{om } \boxed{a>0} \qquad \boxed{a \neq 0}$$

$f'>0$; $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$

$f'<0$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \infty\right)$ (för $a>0$)

$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{för } a > 0 \\ +\infty & \text{för } a \leq 0 \end{cases}$

$a \leq 0$: $f' > 0$ i $(0, \infty)$

$\Rightarrow$ för $a \leq 0$ är $f(x)$ strängt växande ; f antar negativa värden nära 0, positiva för stora x

$\Rightarrow$ f har ett enda nollställe (d.v.s. exakt ett nollställe) $\forall\, a \leq 0$.

$a > 0$: f har lok.-max i $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$

$f \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \to +\infty}]{} -\infty$

$\Rightarrow$ f har exakt ett nollställe i det fallet omm $f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = 0$,

d.v.s. $\ln \frac{1}{\sqrt{2a}} - a \cdot \frac{1}{2a} =$

$= -\frac{1}{2}\left(\ln(2a) + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(2a) = -2 \Leftrightarrow 2a = e^{-1}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2e^{1}} = \frac{1}{2e}$

$\Rightarrow$ ekvationen har exakt en rot för $a \leq 0$ samt för $a = \frac{1}{2e}$.

5

(b) $\int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,dx =$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\arctan\sqrt{x} - \frac{\cancel{2}^{1}}{3}\int x^{\cancel{3/2}^{1}}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln(1+x) + C$$

---

5. $$\int_\varepsilon^N \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^N \frac{\ln x\,(1+x^2)'\,dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\varepsilon^N \ln x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^N\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{4}\int_\varepsilon^N\frac{(x^2)'}{x^2(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{4}\int_\varepsilon^N\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)d(x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{4}\left[\ln x^2\right]_\varepsilon^N - \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_\varepsilon^N =$$

$$= \underbrace{\left[\ldots\right]_\varepsilon^1}_{=A_\varepsilon} + \underbrace{\left[\ldots\right]_1^N}_{=B_N}$$

$$B_N = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_1^N + \frac{1}{4}\left[\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]_1^N \xrightarrow[N\to\infty]{} -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln 2$$

$$A_\varepsilon = +\frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{1+x^2}\ln x\right]_\varepsilon^1 -$$ (6)

$$-\frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_\varepsilon^1 \longrightarrow 0 - \frac{1}{4}\ln 2$$

$$\Rightarrow \quad A_\varepsilon + B_N \xrightarrow[\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = 0.$$

(6.) $f(x)$ är uppenbarligen oändligt många ggr deriverbar för $x<0$ och $x>0$; återstår att bevisa deriverbarhet i "skarven" $x=0$.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \left[t=\frac{1}{h}\right] = te^{-t^2} \xrightarrow[\substack{h\to 0_+ \\ (t\to+\infty)}]{} 0$$

$\Rightarrow$ f:s högerderivata i 0 är lika med f:s vänsterderivata i 0 $(=0)$

Induktivt inses att $f^{(k)}(x)$ för $x>0$ för alla k blir lika med polynom av $\frac{1}{x}$ gånger e^{-1/x^2}; precis som ovan blir då alla högerderivator i 0 lika med vänsterderivatorna i 0 $(=0)$.

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001
Datum: 2002-01-15, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Robert Berman, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Låt f vara en funktion, kontinuerligt deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$, och sådan att dess enda stationära punkt är $x_0 = 3$. Ange om f har lokalt minimum, lokalt maximum eller inflexionspunkt i x_0 i vart och ett av fallen nedan. Motivera! (2p för varje deluppgift)

(a) $f'(1) = 3,\ f'(5) = -1;$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty;$

(c) $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(4) = 4,\ f(5) = 5;$

(d) $f'(2) = -1,\ f(3) = 1,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 3.$

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\sin^2 x}$; (5p)

(b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$. (3p)

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4. Bestäm en primitiv funktion till

(a) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$; (4p)

(b) $\frac{x^2-1}{(x+3)^2(x^2+3)}$. (4p)

5. Ytan mellan x-axeln och kurvan $y = e^{-x}|\sin x|$, $0 \le x < \infty$, roterar ett varv kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym. (7p)

6. Funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[0,1]$. Finn $\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^{2\epsilon} \frac{f(x)}{x}dx$. (7p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8. Formulera integralkalkylens medelvärdessats i dess båda varianter. Bevisa en av varianterna. (7p)

JM

Inledande matematisk analys

F1 TMA 970

15/1 - 2002

Lösningar

1. (a) $x_0 = 3$ är enda nollstället till f'

$f'(1) = 3 > 0 \Rightarrow f' > 0 \quad \forall x < 3$

$f'(5) = -1 < 0 \Rightarrow f' < 0 \quad \forall x > 3$

$\Rightarrow f$ har lokalt maximum i $x_0 = 3$

(b) f måste ha ett minsta värde i $\mathbb{R}$ (eftersom $f \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \infty$) och det måste antas i ett lokalt minimum, som är en stationär pkt $\Rightarrow$ $x_0 = 3$ är ett lokalt minimum (det är den enda stationära pkten)

(c) $f(1) = 1$, $f(2) = 2 \Rightarrow \exists\, \xi \in (1,2)$:

$f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = 1 > 0 \Rightarrow f' > 0 \ \forall x < 3$ (som i (a))

analogt $\exists\, \eta \in (4,5)$: $f'(\eta) > 0$

$\Rightarrow f' > 0 \ \forall x > 3 \Rightarrow x_0 = 3$ inflexionspkt

(d) $f' < 0 \quad \forall x < 3$

f kan inte vara avtagande i $(3, \infty)$; $f' \neq 0$ i $(3, \infty)$

$\Rightarrow f$ växande i $(3, \infty)$

$\Rightarrow f$ har lokalt minimum i $x_0 = 3$.

2. (a) $\dfrac{e^{\cos x} - e}{\sin^2 x} =$

$$= e\,\frac{e^{\cos x - 1} - 1}{\sin^2 x} = e\,\frac{e^{\cos x-1} - 1}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{1-\cos^2 x} =$$

$$= e\,\underbrace{\frac{e^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1}}_{\downarrow\, x\to 0 \atop 1}\;\underbrace{\frac{1}{-(1+\cos x)}}_{\downarrow\, x\to 0 \atop -\frac{1}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{e}{2}$$

(b) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

---

3. $D_f: \quad x \geq 0, \quad x \neq 1$

$f \neq 0 \;\forall x \in D_f$, $\quad f > 0 \;\forall x \in [0,1)$,
$f < 0 \;\forall x \in (1,\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ $\qquad \boxed{f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{+0}\text{"} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{-0}\text{"} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -1$

$\rightarrow$ $x = 1$ är vertikal asymptot
$y = -1$ är vågrät asymptot (i $+\infty$)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} > 0$$

$\rightarrow$ f växande i $[0,1)$ och i $(1,\infty)$
Inga stationära punkter, inga lokala extr.

(3 forts.) $\qquad f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

$\Rightarrow$ grafen har vertikal tangent i $(0,1)$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})^{\cancel{2}} + \sqrt{x}\cdot 2\,\cancel{(1-\sqrt{x})}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x\,(1-\sqrt{x})^{\cancel{4}\,3}} =$$

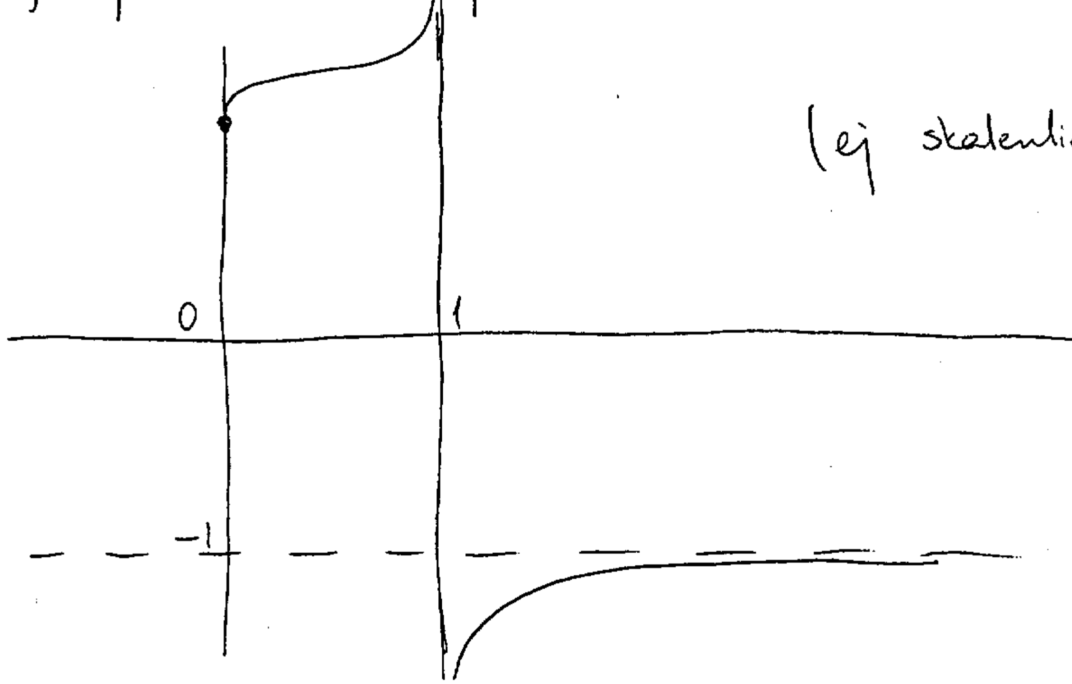
$$= -\frac{1-\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^3} = \frac{3\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^3}$$

$f''=0$ för $x=\frac{1}{9}$

$x \in (0, \frac{1}{9}) \Rightarrow f''(x) < 0$
$x \in (\frac{1}{9}, 1) \Rightarrow f''(x) > 0$
$x \in (1, \infty) \Rightarrow f''(x) < 0$

$\Rightarrow$ inflexionspkt i $x = \frac{1}{9}$

x	0		$1/9$		1				$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$\sim$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$		-1
f'	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	$+$		$+$
f'		$-$	0	$+$		$-$	$-$		$-$



(ej skalenligt)

4. (a) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}(\ln x)'\,dx =$

$= \begin{bmatrix} \ln x = t \\ (\ln x)'dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt =$

$= \int \frac{t+1-1}{\sqrt{1+t}}\,dt = \int \sqrt{t+1}\,dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$

$= \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} - 2(t+1)^{1/2}\ (\cancel{+C}) =$

$= \frac{2}{3}(\ln x+1)^{3/2} - 2(\ln x+1)^{1/2}\ \underbrace{(\cancel{+C})}_{\text{en permitir}}$

(b) $\frac{x^2-1}{(x+3)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$

$x^2-1 = A(x+3)(x^2+3) + B(x^2+3) +$
$+ (Cx+D)(x+3)^2$

$x=-3 \;:\quad 8 = 12B \qquad B = \frac{2}{3}$

$x^3 \;:\quad 0 = A + C \quad\Rightarrow\quad C = -A$

$x^0 \;:\quad -1 = 9A + 3B + 9D \Rightarrow \quad A+D = -\frac{1}{3}$

$x^2 \;:\quad 1 = 3A + B + 6C + D$

$\Rightarrow\ 1 = 3A + \frac{2}{3} - 6A - \frac{1}{3} - A \ \Rightarrow -4A = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow\ A = -\frac{1}{6}\ ,\quad C = \frac{1}{6}\ ,\quad D = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \int \frac{x^2-1}{(x+3)^2(x^2+3)}\,dx = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+3)^2} +$

$+ \frac{1}{6\cdot 2}\int \frac{(x^2)'dx}{x^2+3} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2+3} =$

(5)

4 forts.

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+3} +$$

$$+ \frac{1}{12}\ln(x^2+3) - \frac{1\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{12}\ln(x^2+3) -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{18}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} \qquad (\text{en primitiv})$$

---

5. $$V = \pi\int_0^\infty e^{-2x}\sin^2 x\,dx =$$

$$= \pi\int_0^\infty e^{-2x}\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int_0^p e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^p = -\frac{1}{2}\left(e^{-2p}-1\right) \xrightarrow[p\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\int_0^p e^{-2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{-t}\underbrace{\cos t}_{=(\sin t)'}\,dt \overset{\text{p.i.}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-t}\sin t\right]_0^{2p} + \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{-t}\underbrace{\sin t}_{=(-\cos t)'}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2p}\sin 2p - 0 - \frac{1}{2}\left[e^{-t}\cos t\right]_0^{2p} + \frac{1}{2}\int_0^{2p}(-e^{-t}\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2p}\sin 2p - \frac{1}{2}e^{-2p}\cos 2p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{-t}\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{2p} e^{-t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\underset{\downarrow p\to\infty \; 0}{e^{-2p}}\underbrace{(\sin 2p - \cos 2p)}_{\text{begr. funktion}} + \frac{1}{2}$$

5 forts.

$$\Rightarrow \int_0^p e^{-2x}\cos 2x\,dx \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

$$V = \pi \lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^p e^{-2x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^p e^{-2x}\cos 2x\,dx\right] =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$$

---

6. $\frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ för $\varepsilon > 0$

$\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in [2\varepsilon, \varepsilon]$ för $\varepsilon < 0$

$\Rightarrow$ enligt integralkalkylens (generaliserade) medelvärdessats gäller

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx = f(\xi_\varepsilon)\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{dx}{x} =$$

$$= f(\xi_\varepsilon)\left[\ln|x|\right]_\varepsilon^{2\varepsilon} = f(\xi_\varepsilon)\left(\ln|2\varepsilon| - \ln|\varepsilon|\right) =$$

$$= f(\xi_\varepsilon)\ln\left(\left|\frac{2\cancel{\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}}\right|\right) = f(\xi_\varepsilon)\ln 2,$$

där ξ_ε ligger mellan ε och 2ε

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow 2\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow \xi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx = f(0)\ln 2$$

(Eftersom det var givet att allt utspelar sig på $[0,1]$ är bara $\varepsilon > 0$ intressant, men jag glömde det ovan.)

Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001
Datum: 2001-10-24, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Per Hörfelt, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent. (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx; \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{x+1}{x^4+1}\,dx; \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{x^2 \ln x}{x^4+1}\,dx; \quad \text{(d)} \int_2^\infty \frac{dx}{\ln x};$$

$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad \text{(f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}; \quad \text{(g)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}; \quad \text{(h)} \int_0^1 x \ln x\,dx.$$

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Beräkna $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$. (4p)

(b) Beräkna arean av det begränsade område, som innesluts av kurvorna $y = x$ och $y = x + \sin^2 x$, $0 \le x \le \pi$. (4p)

5. Rita grafen till funktionen $\arccos(\cos x)$. (6p)

6. Funktionen f är deriverbar och obegränsad på det begränsade öppna intervallet (a, b). Visa att f' också är obegränsad på (a, b). (6p) Ge ett exempel som visar att det omvända inte gäller, d.v.s. ge exempel på en deriverbar begränsad funktion (på ett öppet och begränsat intervall), vars derivata är obegränsad. (1p) Ge också ett exempel som visar att påståendet inte är sant för obegränsade intervall. (1p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8.(a) Formulera regeln för derivata av en produkt. (1p)

(b) Formulera och bevisa satsen om partiell integration (för obestämda integraler). (5p)

/JM

Inledande matematisk analys F1

TMA970

24/10 - 01

Lösningar

1. (a) divergent; (b) konvergent;
(c) konvergent; (d) divergent;
(e) konvergent; (f) konvergent;
(g) konvergent; (h) konvergent.

---

2. (a) $$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}}{4\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

alternativ lösning:

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x\,(1+\cos x)} = \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{1+\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2};$$

(b) $$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+x+\cancel{1}-\cancel{x^2}+x-\cancel{1}}{|x|\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{}1} + \underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{}1}\right)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$$

(3.) $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

Nollställen : endast $x = -2$ $\quad \Big| \begin{array}{l} f < 0 \ \forall x < -2 \\ f > 0 \ \forall x > -2 \\ \quad (\neq 0) \end{array}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \left(= \text{"} -\infty \cdot e^{0} \text{"} \right) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \left(= \text{"} +\infty \cdot e^{0} \text{"} \right) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \left(= \text{"} 2 \cdot e^{-\infty} \text{"} \right) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \left(= \text{"} 2 \cdot e^{+\infty} \text{"} \right) = +\infty$

Asymptoter : $x = 0$ är vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x} e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1 \cdot e^{0} = 1 \quad (= k)$$

$$f(x) - x = (x+2)e^{\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{e^{1/x} - 1}{\underbrace{1/x}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0}} + 2e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1 + 2 = 3 \quad (= m)$$

$\Rightarrow$ $y = x + 3$ asymptot (sned) i $\pm\infty$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/x} - \frac{x+2}{x^2} e^{1/x} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} e^{1/x}$$

$f' = 0$ för $x = -1$ och $x = 2$

Teckenstudie : $f' > 0 \ \forall x < -1 \ \& \ \forall x > 2$

$f' < 0 \ \forall x \in (-1, 0) \ \& \ \forall x \in (0, 2)$

$\left(\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 \right)$

$$f''(x) = e^{1/x}\,\frac{5x+2}{x^4}$$

$f'' = 0$ för $x = -\frac{2}{5}$

$f'' < 0 \quad \forall x < -\frac{2}{5}$

$f'' > 0 \quad \forall x \in (-\frac{2}{5}, 0)$ & $\forall x \in (0, \infty)$

$\Rightarrow$ f har lok max i $x = -1$

f har lok. min i $x = 2$

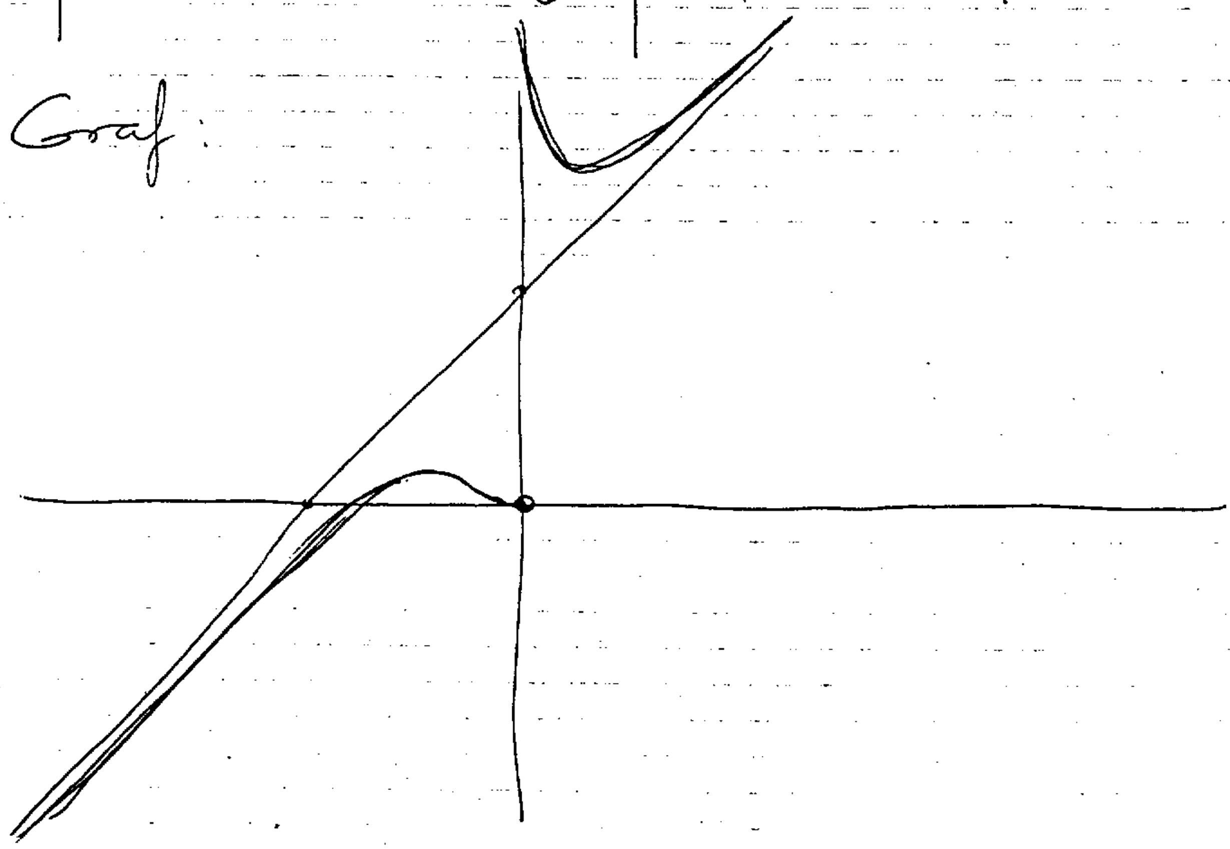
f har inflexionspkt i $x = -\frac{2}{5}$

konvex : i $(-\frac{2}{5}, 0)$ och $(0, \infty)$

konkav : i $(-\infty, -\frac{2}{5})$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{5}{2}$		0		2		$+\infty$
f	$y=x+3$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	lok.max $1/e$	$\searrow$	infl.	$\searrow$	0 | $+\infty$	$\searrow$	lok.min $4\sqrt{e}$	$\nearrow$	$y=x+3$ $+\infty$
f'		$+$			0	$-$			(0)	$-$	0	$+$	
f''		$-$					0	$+$		$+$		$+$	

Graf:



4. (a) $\int 1 \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx =$

$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$

$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$

$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C$

(b) Arean $\overset{*}{=} \int_0^{\pi} \left((x+\sin^2 x) - x\right) dx =$

$= \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx =$

$= \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

(* eftersom $x + \sin^2 x \geq x \quad \forall x$)

---

5. $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$

$\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x) \quad \forall x$

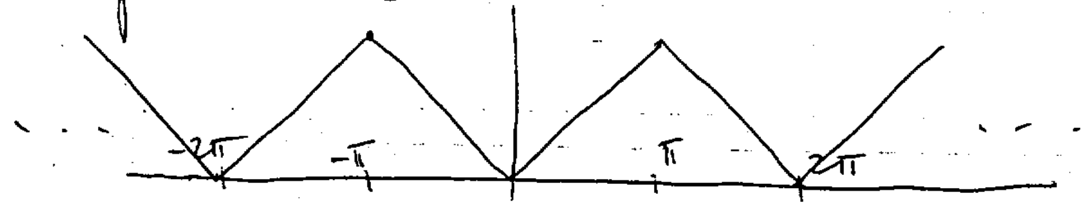
$\Rightarrow$ funktionen är jämn

$\Rightarrow \arccos(\cos x) = |x| \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$

$\arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$ funktionen är periodisk med perioden 2π

Graf



6. Låt $x_0 \in (a,b)$; $\forall x \in (a,b)$ 5

$\exists \xi_x : f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0)$ (Lagranges sats)

ξ_x mellan x_0 och x

Antag att $|f'(x)| \leq A \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow |f(x)| \leq \underbrace{|f(x_0)|}_{\text{const}} + A|x - x_0| <$

$< |f(x_0)| + A(b-a)$

$\Rightarrow f$ begränsad på (a,b)

Motsägelse!

$\Rightarrow f'$ obegränsad på (a,b)

$f(x) = \arcsin x$ begränsad på $(-1,1)$, men dess derivata är obegränsad

---

$f(x) = x$ har begränsad derivata, men är själv obegränsad på $(0,\infty)$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Tentamensskrivning i Inledande Matematisk Analys (TMA970), F1, den 12/1 2000, kl 14.15-18.15 (MG).
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Anders Logg, 0740 - 45 90 22.

OBS! Angiv namn, personnummer, linje och inskrivningsår.

==

1) Sök reella lösningar till ekvationen $2|x-1|+3|x+2| = 5-4x$. (7p)

2) Beräkna a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)dx$, (4p)

b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3-x}$. (5p)

3) Beräkna (exakta) värdet av $\arctan\frac{3}{2} + \arctan 5$. (7p)

4) Studera kurvan $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $1 \le x \le 2$. Beräkna

a) längden av kurvan, (4p)

b) arean av den rotationsyta, som erhålles då kurvan roterar (ett varv) kring y-axeln. (4p)

5) Bestäm inversa funktionen till $f(x) = \tanh x$, med angivande av definitions- och värdemängd. (6p)

6) Bestäm (om möjligt) konstanter A,B,C,D,E och F, så att

$$\sum_{k=3}^{n} k^4 = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F.$$ (7p)

7) Definiera begreppet derivata, samt formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats, (dvs. Lagranges sats inklusive Rolles sats). (8p)

8) Definiera begreppet gränsvärde, samt formulera och bevisa en sats om gränsvärdet för en sammansatt funktion, $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$. (8p)

/RP

Inledande Matematisk Analys, F1, 12/1 2000 (1)

1) $2|x-1| + 3|x+2| = 5 - 4x$

Brytpunkter: $x = 1$ och $x = -2$

$$VL = \begin{cases} 2(x-1) + 3(x+2) \equiv 5x + 4 & \text{för } x \geq 1 \\ -2(x-1) + 3(x+2) \equiv x + 8 & \text{för } -2 < x < 1 \\ -2(x-1) - 3(x+2) \equiv -5x - 4 & \text{för } x \leq -2 \end{cases}$$

Fall 1: Om $x \geq 1$ fås ekv $5x + 4 = 5 - 4x$

$\Leftrightarrow 9x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{9}$ (falsk rot) (ty $x_1 < 1$).

Fall 2: Om $-2 < x < 1$ fås ekv $x + 8 = 5 - 4x$

$\Leftrightarrow 5x = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{5}$ (äkta rot, ty $-2 < x_2 < 1$)

Fall 3: Om $x \leq -2$ fås ekv $-5x - 4 = 5 - 4x$

$\Leftrightarrow -x = 9 \Rightarrow x_3 = -9$ (äkta rot, ty $x_3 < -2$)

Svar: $x = -3/5$ eller $x = -9$

2a) $$\int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x)\,dx = \begin{bmatrix}\text{Part.} \\ \text{int.}\end{bmatrix} = \left[x \cdot \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 1 \cdot \frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} - 0 + \left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{0-1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$$ (Svar)

b) Prim. funkt: $$F(x) = \int \frac{dx}{x^3 - x} = \int \frac{1\,dx}{x(x-1)(x+1)} = \begin{bmatrix}\text{Partial-} \\ \text{bråk}\end{bmatrix}$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix}\text{Slå ihop logaritm.}\end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| \;(+C)$$

$$\therefore I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3 - x} = \underbrace{\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2}\right)}_{=0} - \frac{1}{2}\ln\frac{4-1}{4} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$ (Svar)

3) $\arctan\frac{3}{2} + \arctan 5 \equiv \alpha + \beta$.

Sätt $\left| \begin{array}{l} \alpha = \arctan\frac{3}{2} \implies \tan\alpha = \frac{3}{2}, \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \beta = \arctan 5 \implies \tan\beta = 5, \quad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

Bilda (först) $\tan(\alpha+\beta) \equiv \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{3}{2}+5}{1-\frac{3}{2}\cdot 5} = -1$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = -1 \implies \underline{\alpha+\beta = -\frac{\pi}{4} + n\pi}$, där n = heltal

Men $\left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \implies \underline{\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi} \quad \therefore n = 1$

Svar: $\alpha+\beta = \arctan\frac{3}{2} + \arctan 5 = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$

---

4) a) Båglängd $L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$

$= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{16} - \frac{2x}{4x} + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}}\,dx =$

$= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{8} + \ln x\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{4}{8} + \ln 2\right) - \left(\frac{1}{8} + \ln 1\right) = \underline{\underline{\frac{3}{8} + \ln 2}}$ (längdenh.)

b) Rot. area $A = \int_a^b 2\pi x \cdot ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

$= \int_1^2 2\pi x \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx = 2\pi \int \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)dx =$

$= 2\pi \left[\frac{x^3}{12} + x\right]_1^2 = 2\pi\left(\frac{8-1}{12} + 2 - 1\right) =$

$= 2\pi \frac{(7+12)}{12} = \underline{\underline{\frac{19\pi}{6}}}$ (areaenh.) (Svar)

5) $y = f(x) = \tanh x \equiv \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \equiv \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\iff y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1 \iff e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$

$\iff x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y} = f^{-1}(y)$ (Byt bokstäver!)

$\therefore$ Invers: $\underline{y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$ (för $-1 < x < 1$)

med $D_{f^{-1}} = V_f = \underline{]-1,1[}$ och $V_{f^{-1}} = D_f = \underline{]-\infty,\infty[}$

---

6) $S_n = \sum_{k=3}^{n} k^4 = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F$

Bilda (på två sätt): 1) $S_{n+1} - S_n \equiv$

$\equiv \sum_{k=3}^{n+1} k^4 - \sum_{k=3}^{n} k^4 \equiv (n+1)^4 \equiv \underline{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$

och 2) $S_{n+1} - S_n = A[(n+1)^5 - n^5] + B[(n+1)^4 - n^4] +$

$+ C[(n+1)^3 - n^3] + D[(n+1)^2 - n^2] + E[n+1-n] + F(1-1)$

$\equiv A[n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n^5] +$

$+ B[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4] + C[n^3 + 3n^2 + 3n$

$+ 1 - n^3] + D[n^2 + 2n + 1 - n^2] + E$. Koefficienter

$n^4: \ 1 = 5A$

$n^3: \ 4 = 10A + 4B$

$n^2: \ 6 = 10A + 6B + 3C$

$n^1: \ 4 = 5A + 4B + 3C + 2D$

$n^0: \ 1 = A + B + C + D + E$

$\Longrightarrow$ $\underline{A = \frac{1}{5}}$, $\underline{B = \frac{1}{2}}$, $\underline{C = \frac{1}{3}}$, $\underline{D = 0}$, $\underline{E = -\frac{1}{30}}$ (Svar:)

Slutligen fås (för $n=3$) $\underline{F} = 3^4 - A\cdot 3^5 - B\cdot 3^4 - C\cdot 3^3 - D3^2 - E\cdot 3 = \underline{-17}$

Bevis: Induktion! (Klar enligt ovan.)

RP

Tentamensskrivning i **Inledande Matematisk Analys (TMA970), F1**, den 20/10-1999, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Jakob Hultén, ankn 5323

OBS ! På skrivningsomslaget skall anges namn, personnummer, linje och inskrivningsår.

1. Beräkna rotationsvolymerna, då området $\{(x, y): \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 1 + x^2\}$ roterar (ett varv) kring
   a) x-axeln b) y-axeln (7p)

2. Rita kurvan $y = \sqrt{x^2 + 4x + 13}$ (i sina huvuddrag) med angivande av maxima, minima och asymptoter. (8p)

3. Bevisa att för alla heltal $n \ge 1$ gäller att $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{n^2 + 3n + 3}{2 \cdot 3^n}$. (7p)

4. Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{(5x - 1)\,dx}{x^3 + 7x^2 + 17x + 11}$. (8p)

5. En vätska med densiteten ρ blandas med en annan vätska med densiteten ρ_0 (utan att några kemiska reaktioner inträffar). Antag att p och q anger mass respektive volymsandelen av den första vätskan i blandningen, (dvs $100p$ och $100q$ anger mass och volymsprocenterna). Härled en formel för sambandet mellan p och q, samt bestäm maximala skillnaden mellan p och q, (dvs beräkna största värdet för $|p - q|$). (7p)

6. För vilka reella konstanter α, β och γ konvergerar integralen
   $$\int_0^{\pi} x^{\alpha} (\sin x)^{\beta} |\cos x|^{\gamma} \, dx \ ?$$ (7p)

7. Definiera begreppet derivata, samt härled en formel för derivatan av en produkt $f(x)g(x)$. (7p)

8. a) Definiera begreppet "likformigt kontinuerlig funktion". (2p)
   b) Definiera begreppet Riemann-integral, samt bevisa att en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall $[a, b]$ är Riemann-integrerbar. (7p)

/ RP

Inl. mat. analys F1 20/10 - 1999

1. a) Rot.-volym kring x-axeln $= \int_0^1 \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1+x^2)^2 dx =$
$= \pi \int_0^1 1 + 2x^2 + x^4 \, dx = \pi \left[x + 2x^3/3 + x^5/5 \right]_0^1 = 28\pi/15.$

b) Rot.-volym kring y-axeln $= 2\pi \int_0^1 xy \, dx = 2\pi \int_0^1 x(1+x^2) \, dx =$
$= \pi \left[\frac{(1+x^2)^2}{2} \right]_0^1 = 3\pi/2.$

2. Eftersom $y = \sqrt{x^2+4x+13} = \sqrt{(x+2)^2+9}$, så är funktionen kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Därmed kan inga lodräta asymptoter finnas. Det är också klart att funktionen är strängt avtagande på $(-\infty, 2]$ och strängt växande på $[-2, \infty)$. Globalt minimum är alltså $y(-2) = 3$. Eftersom:

$$y/x = \frac{\sqrt{x^2+4x+13}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+4/x+13/x^2} \longrightarrow \begin{cases} 1, & x \to +\infty \\ -1, & x \to -\infty \end{cases}$$

så är riktningskoeff. för en asymptot i $\pm\infty$ lika med ± 1 (resp.).

$+\infty$: $y - x = \sqrt{x^2+4x+13} - x = \frac{x^2+4x+13-x^2}{\sqrt{x^2+4x+13}+x} =$
$= \frac{4 + 13/x}{\sqrt{1+4/x+13/x^2}+1} \longrightarrow 2, \quad x \longrightarrow +\infty.$

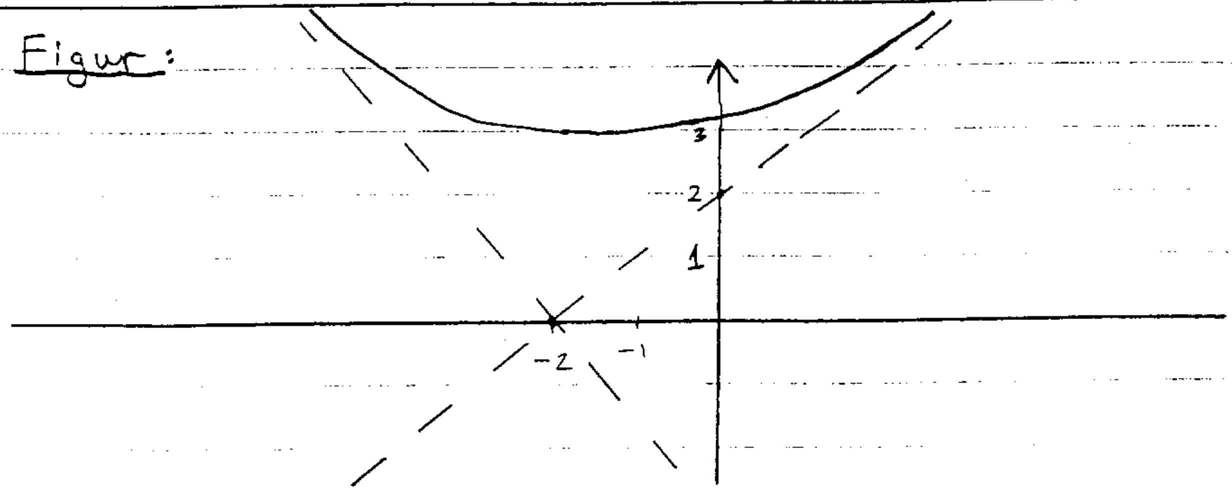
Alltså är $y = x+2$ en asymptot i $+\infty$.

$-\infty$: $y + x = \sqrt{x^2+4x+13} + x = \frac{x^2+4x+13-x^2}{\sqrt{x^2+4x+13}-x} =$
$= \frac{4 + 13/x}{-\sqrt{1+4/x+13/x^2}-1} \longrightarrow -2, \quad x \to -\infty.$

Alltså är $y = -x-2$ en asymptot i $-\infty$.

Inl. mat. analys F1 20/10 -1999

Figur:



3. Vi bevisar påståendet med induktion över n.

Sätt $VL(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2/3^k$ och $HL(n) = \frac{3}{2} - \frac{n^2+3n+3}{2\cdot 3^n}$.

(I) $VL(1) = \sum_{k=1}^{1} k^2/3^k = \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1+3+3}{6} = HL(1)$: OK!

(II) Antag att $VL(p) = HL(p)$ för något $p \geq 1$.

$$\Rightarrow VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} k^2/3^k = VL(p) + \frac{(p+1)^2}{3^{p+1}} = HL(p) + \frac{p^2+2p+1}{3^{p+1}} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{p^2+3p+3}{2\cdot 3^p} + \frac{p^2+2p+1}{3^{p+1}} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3p^2+9p+9-2p^2-4p-2}{2\cdot 3^{p+1}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{p^2+5p+7}{2\cdot 3^{p+1}} = \frac{3}{2} - \frac{(p+1)^2+3(p+1)+3}{2\cdot 3^{p+1}} = HL(p+1) \text{ : Ok!}$$

(III) Enligt induktionsaxiomet så gäller att $VL(n) = HL(n)$, $n \geq 1$.

4. $$\frac{5x-1}{x^3+7x^2+17x+11} = \frac{5x-1}{(x+1)(x^2+6x+11)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+11}$$

$$\Leftrightarrow 5x-1 = A(x^2+6x+11) + (Bx+C)(x+1)$$

$\underline{x=-1} \Rightarrow A = -1 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow C = 10$

$$\int_0^y \frac{5x-1}{x^3+7x^2+17x+11}\,dx = \int_0^y \frac{-1}{x+1} + \frac{x+10}{x^2+6x+11}\,dx =$$

$$= \int_0^y \frac{-1}{x+1} + \tfrac{1}{2}\,\frac{2x+6}{x^2+6x+11} + \frac{7}{x^2+6x+11}\,dx$$

$$= \int_0^y \frac{-1}{x+1} + \tfrac{1}{2}\,\frac{2x+6}{x^2+6x+11} + \tfrac{7}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \left[-\ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln|x^2+6x+11| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^y =$$

$$= -\ln|y+1| + \tfrac{1}{2}\ln|y^2+6y+11| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{y+3}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{(y^2+6y+11)^{1/2}}{y+1}\right| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{y+3}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{(1+6/y+11/y^2)^{1/2}}{1+1/y}\right| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{y+3}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right), \quad y \to \infty.$$

<u>Slutsats</u>: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{5x-1}{x^3+7x^2+17x+11}\,dx = \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\ln(11)}{2} - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$

<u>5.</u> Vätska I : $\rho = m/V$ ($m =$ massan, $V =$ volym)

Vätska II : $\rho_0 = m_0/V_0$ ($m_0 =$ massan, $V_0 =$ volym)

Efter blandning : $p = \frac{m}{m+m_0}$ och $q = \frac{V}{V+V_0}$.

<u>Sambandet</u> : $q = \frac{V}{V+V_0} \Rightarrow q(V+V_0) = V \Rightarrow V_0 = V(1-q)/q$

$$\Rightarrow p = \frac{m}{m+m_0} = \frac{\rho V}{\rho V + \rho_0 V_0} = \frac{\rho V}{\rho V + \rho_0 V(1-q)/q} = \frac{\rho}{\rho + \rho_0 \frac{1-q}{q}}.$$

$$|p-q| = \left|\frac{\rho V}{\rho V+\rho_0 V_0} - \frac{V}{V+V_0}\right| = \left|\frac{\rho}{\rho+\rho_0 t} - \frac{1}{1+t}\right| =$$

$$= \left|\frac{\rho+\rho t-\rho-\rho_0 t}{(\rho+\rho_0 t)(1+t)}\right| = \frac{t|\rho-\rho_0|}{(\rho+\rho_0 t)(1+t)}, \quad \text{där} \quad t = V_0/V > 0.$$

Sätt nu $f(t) = \dfrac{t}{(\rho+\rho_0 t)(1+t)}$.

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(\rho+\rho_0 t)(1+t) - t(\rho_0(1+t)+\rho+\rho_0 t)}{(\rho+\rho_0 t)^2(1+t)^2} =$$

$$= \frac{\rho - \rho_0 t^2}{(\rho+\rho_0 t)^2(1+t)^2} = \begin{cases} >0 \iff 0<t<\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \\ =0 \iff t=\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \\ <0 \iff t>\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \end{cases}.$$

Alltså är det största värdet av $|p-q|$:

$$f\left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\right)|\rho-\rho_0| = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}|\rho-\rho_0|}{\left(\rho+\rho_0\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\right)} = \frac{|\sqrt{\rho}-\sqrt{\rho_0}|}{\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho_0}}.$$

6. Integralen är generaliserad i $x=0$, $x=\pi/2$ och $x=\pi$. Därför gör vi uppdelningen:

$$\int_0^{\pi} x^\alpha (\sin x)^\beta |\cos x|^\gamma = \underbrace{\int_0^{\pi/4} x^\alpha (\sin x)^\beta (\cos x)^\gamma \,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^\alpha (\sin x)^\beta (\cos x)^\gamma \,dx}_{I_2} +$$

$$+ \underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/4} x^\alpha (\sin x)^\beta (-\cos x)^\gamma \,dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{3\pi/4}^{\pi} x^\alpha (\sin x)^\beta (-\cos x)^\gamma \,dx}_{I_4}.$$

Nu behandlar vi I_1, I_2, I_3 och I_4 separat.

$\underline{I_1}$: Eftersom $x^\alpha (\sin x)^\beta (\cos x)^\gamma = x^{\alpha+\beta} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta (\cos x)^\gamma}_{\substack{\text{Begr. på } (0,\pi/4) \\ \text{och } >0 \text{ i en} \\ \text{omgivning till } x=0,}}$

så är I_1 konvergent $\iff \int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\,dx$ konvergent $\iff \alpha+\beta > -1$.

$$\underline{I_2} = [t = \pi/2 - x] = \int_0^{\pi/4} (\pi/2 - t)^\alpha (\cos t)^\beta (\sin t)^\gamma \,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\pi/2-t)^\alpha (\cos t)^\beta \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\gamma}_{\substack{\text{Begränsad på } (0,\pi/4) \\ \text{och } >0 \text{ i en omg.} \\ \text{till } t=0.}} \cdot t^\gamma \, dt \; .$$

$\Rightarrow$ I_2 konvergent $\Leftrightarrow$ $\int_0^{\pi/4} t^\gamma \, dt$ konv. $\Leftrightarrow$ $\gamma > -1$.

$\underline{I_3}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\gamma > -1$ (pss som för I_2)

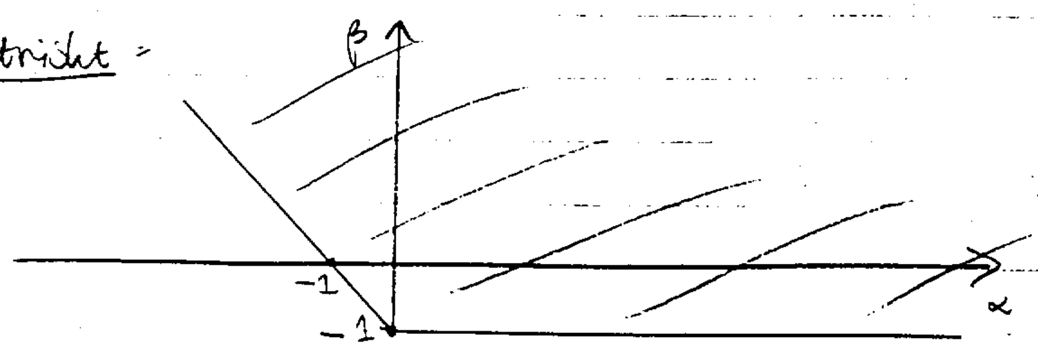
$$\underline{I_4} = [t = \pi - x] = \int_0^{\pi/4} (\pi - t)^\alpha (\sin t)^\beta (\cos t)^\gamma \, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\pi-t)^\alpha \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\beta (\cos t)^\gamma}_{\substack{\text{Begr. på } (0,\pi/4) \text{ och} \\ >0 \text{ i en omg. till } t=0.}} t^\beta \, dt \; .$$

$\Rightarrow$ I_4 konvergent $\Leftrightarrow$ $\int_0^{\pi/4} t^\beta \, dt$ konv. $\Leftrightarrow$ $\beta > -1$.

Slutsats. I är konvergent $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha + \beta > -1 \\ \beta > -1 \\ \gamma > -1 \end{cases}$.

Geometriskt:



och $\gamma > -1$.