CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

13 september 2025,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.
Jana Madjarova: 031-7723531

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. För $a = \sqrt{8}$ och $b = \sqrt{2}$ är talet $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$ lika med

   (a) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$; (b) $\dfrac{4}{5}$; (c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Det största av de fyra talen $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{5}$, $c = \dfrac{17}{10}$, $d = \dfrac{13}{8}$, är

   (a) a; (b) b; (c) c; (d) d.

3. Antalet heltal i definitionsmängden till funktionen $f(x) = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{2-\sqrt{x+3}}$ är

   (a) 8; (b) 7; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).

4. En av lösningarna till ekvationen $x^2 + bx + 1 = 0$ är -2. Den andra lösningen är

   (a) $\dfrac{1}{2}$; (b) $-\dfrac{1}{2}$; (c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.

5. Antalet (reella) lösningar till ekvationen $|x+1| = 2|x| + 1$ är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

6. Summan av lösningarna till ekvationen $\ln(3x-2) = \ln(5x-4) - \ln x$ är

(a) $\frac{1}{3}$; (b) 1; (c) annat tal; (d) ekvationen har inga lösningar.

7. Antalet lösningar till ekvationen $\sqrt{x+5} = \sqrt{x} + 2$ är

(a) 0; (b) 1; (c) ; 2 (d) inget av (a)-(c).

8. Antalet heltalslösningar till olikheten $\dfrac{3x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4x + 4} < 2$ är

(a) 4; (b) 5; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).

9. Det minsta positiva heltalet n som är lösning till olikheten $2^n > n^2 + 3n + 5$ är

(a) 6; (b) 5; (c) 4; (d) 3.

10. Om $x = \sin 270° + \cos 82° \cos 22° + \sin 22° \cos 8°$, så är x lika med

(a) $\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) $\frac{3}{2}$; (d) annat tal.

11. Låt $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ och $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ vara sådana att $\tan\alpha = 3$ och $\tan\beta = 2$. Då gäller att $\sin(\alpha + \beta)$ är lika med

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) inget av (a)-(c).

12. Låt $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ och $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ vara sådana att $\tan\alpha = 3$ och $\tan\beta = 2$. Då gäller att $\alpha + \beta$ är lika med

(a) $\frac{\pi}{3}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) det går inte att avgöra; (d) inget av (a)-(c).

13. En rätvinklig triangel har hypotenusa 12 l.e. och en spetsig vinkel 15°. Triangelns area är då

(a) 18 a.e.; (b) 28 a.e.; (c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.

14. En triangel har sidlängderna $|AB| = 7$, $|BC| = 5$, $|CA| = 3$ längdenheter. Vinkeln vid hörnet A är då

(a) mindre än 30°; (b) större än eller lika med 30°;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

15. En triangels tre höjder skär varandra utanför triangeln. Man kan då dra slutsatsen att triangeln är

(a) spetsvinklig ; (b) ej spetsvinklig;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar: $-5/16$

17. Finn och ange det största heltalet p för vilket ekvationen $x^2+2px+7=0$ har två positiva lösningar.

Svar: -3

18. Beräkna och ange summan $1+3+5+\cdots+101-(2+4+6+\cdots+100)$.

Svar: 51

19. Om $\log_3 a = 2$ och $\log_{\frac{1}{3}} b = 3$, bestäm och ange $\log_{ab} 9$.

Svar: -2

20. Lös olikheten

$$2^{\frac{2-x}{x+1}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}}.$$

Ange summan av alla heltalslösningar.

Svar: 15

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} < 4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

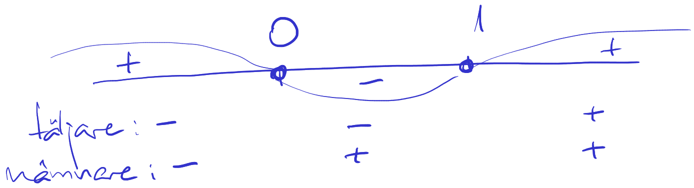
Lösning: Olikheten är ekvivalent med

$$3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} = \frac{3x^3 + x^2 - x - 3}{x^3} > 0, \quad x \neq 0.$$

Prövning ger att $x = 1$ är nollställe till täljaren, så att faktorn $x - 1$ kan brytas ut:

$$\frac{3x^3 + x^2 - x - 3}{x^3} = \frac{(x-1)(3x^2 + 4x + 3)}{x^3} \overset{?}{>} 0$$

Andragradsfaktorn $3x^2 + 4x + 3$ har inga reella nollställen och är positiv för alla reella x. Kvotens tecken kommer att ändras i $x = 0$ och $x = 1$



Alla lösningar till olikheten ges alltså av punkterna i mängden

$$(-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$