

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

14 september 2024,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Anders Logg: 031-7725346 (främst M, 12:00–14:00)

Anna Karlsson: 0721-575850 (främst F och TM, 12:00–14:00)

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talet $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}}{\sqrt{24}}$ är lika med

(a) $\sqrt{\frac{8}{3}}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $x = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$, så är x lika med

(a) $\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

3. Mängden av alla reella x för vilka uttrycket $\frac{\sqrt{9-x^2}}{2+\sqrt[3]{x+1}}$ är definierat (och antar reella värden) är

(a) $(-\infty, 3]$; (b) $[-1, 3]$; (c) $(-1, 3)$; (d) inget av (a)-(c).

4. Ekvationen $4-x = \sqrt{x-2}$ har lösningarna

(a) $\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$; (b) 3; (c) $-\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$; (d) inget av (a)-(c).

5. Talet $16^{\log_{0,25} 2} + \log_5 \left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}} \right)$ är lika med

- (a) $\frac{7}{12}$; (b) $\frac{1}{12}$; (c) $\frac{13}{3}$; (d) inget av (a)-(c).

6. Den minsta heltalslösningen till olikheten $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$ är

- (a) 9; (b) 7; (c) det finns ingen; (d) inget av (a)-(c).

7. Ekvationen $x^8 - y^8 = 0$ har samma (reella) lösningar som ekvationen

- (a) $|x| - |y| = 0$; (b) $x - y = 0$; (c) $x^4 + y^4 = 0$; (d) inget av (a)-(c).

8. Antalet reella lösningar till ekvationen $\ln(\ln(3^{2x} - 3^x + 1)) = 0$ är

- (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

9. Olikheten $x^2 - px + p^2 \leq 0$, där $p \neq 0$ är ett reellt tal, gäller

- (a) för alla reella tal x ; (b) för alla x som tillhör ett slutet intervall;
(c) endast för $x = p$; (d) inget av (a)-(c).

10. Om $x = \frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ}$, så är x lika med

- (a) $\frac{1}{2}$; (b) -1 ; (c) 1; (d) inget av (a)-(c).

11. Om $A = 3\sqrt[3]{2} - 1$ och $B = 2\sqrt[3]{3}$, så gäller

- (a) $A > B$; (b) $A = B$; (c) $A < B$; (d) inget av (a)-(c).

12. Om $A = 3i\sqrt[3]{2} - 1$ och $B = 2i\sqrt[3]{3}$, så gäller

- (a) $A > B$; (b) $A = B$; (c) $A < B$; (d) inget av (a)-(c).

13. En sats i talteori lyder: *Om a, b är positiva heltal, och p är ett primtal som delar produkten ab , så gäller att p delar a eller p delar b .* Av satsen följer att

- (a) Om p delar a och p delar b , så delar p produkten ab ;
(b) Om p delar ab och p delar a , så delar p inte b ;
(c) Om p delar a^2b , så gäller att p delar a eller p delar b ;
(d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av satsen.

14. Vinklarna i en triangel bildar en aritmetisk följd. Då gäller att

- (a) en av vinklarna är 60° ; (b) det finns ingen sådan triangel;
(c) ingen av vinklarna är 60° ; (d) inget av (a)-(c).

15. Om u , v och w är vinklarna i en triangel, så gäller att

- (a) $\sin u + \sin v = \sin w$; (b) $\sin w = \sin(u - v)$;
(c) $\sin u + \sin v + \sin w = 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{8} - \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{9}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Lös ekvationen $x^2 + x - \frac{1}{p} = 0$, där $p \neq 0$ är en reell parameter. Ange antalet (tillåtna) heltalsvärden för p , för vilka ekvationen saknar reella lösningar.

Svar:

18. Lös ekvationen $\cos^2 4x \cos 8x = 1$. Ange summan av de lösningar som ligger i intervallet $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Svar:

19. Fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets sådant att $AB \parallel CD$ och $BC = AD$. Om $AB = a$, $CD = b$, där $a > b$, och vinkeln vid hörnet A är 60° , beräkna fyrhörningens area.

Svar:

20. Lös olikheten $\log_3 \left(1 + \frac{1}{x}\right) > -1$. Ange den största negativa heltalslösningen.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Bestäm alla reella lösningar till ekvationen:

$$\ln(3 \sin x) = 2 \ln(-\sqrt{2} \cos x)$$

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

14 september 2024,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Anders Logg: 031-7725346 (främst M, 12:00–14:00)

Anna Karlsson: 0721-575850 (främst F och TM, 12:00–14:00)

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talet $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}}{\sqrt{24}}$ är lika med

- (a) $\sqrt{\frac{8}{3}}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $x = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$, så är x lika med

- (a) $\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

3. Mängden av alla reella x för vilka uttrycket $\frac{\sqrt{9-x^2}}{2+\sqrt[3]{x+1}}$ är definierat (och antar reella värden) är

- (a) $(-\infty, 3]$; (b) $[-1, 3]$; (c) $(-1, 3)$; (d) inget av (a)-(c).

4. Ekvationen $4-x = \sqrt{x-2}$ har lösningarna

- (a) $\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$; (b) 3; (c) $-\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$; (d) inget av (a)-(c).

5. Talet $16^{\log_{0,25} 2} + \log_5 \left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}} \right)$ är lika med

- (a) $\frac{7}{12}$; (b) $\frac{1}{12}$; (c) $\frac{13}{3}$; (d) inget av (a)-(c).

6. Den minsta heltalslösningen till olikheten $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$ är

- (a) 9; (b) 7; (c) det finns ingen; (d) inget av (a)-(c).

7. Ekvationen $x^8 - y^8 = 0$ har samma (reella) lösningar som ekvationen

- (a) $|x| - |y| = 0$; (b) $x - y = 0$; (c) $x^4 + y^4 = 0$; (d) inget av (a)-(c).

8. Antalet reella lösningar till ekvationen $\ln(\ln(3^{2x} - 3^x + 1)) = 0$ är

- (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

9. Olikheten $x^2 - px + p^2 \leq 0$, där $p \neq 0$ är ett reellt tal, gäller

- (a) för alla reella tal x ; (b) för alla x som tillhör ett slutet intervall;
(c) endast för $x = p$; (d) inget av (a)-(c).

10. Om $x = \frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ}$, så är x lika med

- (a) $\frac{1}{2}$; (b) -1 ; (c) 1; (d) inget av (a)-(c).

11. Om $A = 3\sqrt[3]{2} - 1$ och $B = 2\sqrt[3]{3}$, så gäller

- (a) $A > B$; (b) $A = B$; (c) $A < B$; (d) inget av (a)-(c).

12. Om $A = 3i\sqrt[3]{2} - 1$ och $B = 2i\sqrt[3]{3}$, så gäller

- (a) $A > B$; (b) $A = B$; (c) $A < B$; (d) inget av (a)-(c).

13. En sats i talteori lyder: *Om a, b är positiva heltal, och p är ett primtal som delar produkten ab , så gäller att p delar a eller p delar b .* Av satsen följer att

- (a) Om p delar a och p delar b , så delar p produkten ab ;
(b) Om p delar ab och p delar a , så delar p inte b ;
(c) Om p delar a^2b , så gäller att p delar a eller p delar b ;
(d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av satsen.

14. Vinklarna i en triangel bildar en aritmetisk följd. Då gäller att

- (a) en av vinklarna är 60° ;
(b) det finns ingen sådan triangel;
(c) ingen av vinklarna är 60° ;
(d) inget av (a)-(c).

15. Om u , v och w är vinklarna i en triangel, så gäller att

(a) $\sin u + \sin v = \sin w$;

(b) $\sin w = \sin(u - v)$;

(c) $\sin u + \sin v + \sin w = 0$;

(d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{8} - \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{9}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar: $-15/28$

17. Lös ekvationen $x^2 + x - \frac{1}{p} = 0$, där $p \neq 0$ är en reell parameter. Ange antalet (tillåtna) heltalsvärden för p , för vilka ekvationen saknar reella lösningar.

Svar: 3

18. Lös ekvationen $\cos^2 4x \cos 8x = 1$. Ange summan av de lösningar som ligger i intervallet $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Svar: $9\pi/4$

19. Fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets sådant att $AB \parallel CD$ och $BC = AD$. Om $AB = a$, $CD = b$, där $a > b$, och vinkeln vid hörnet A är 60° , beräkna fyrhörningens area.

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - b^2)$

20. Lös olikheten $\log_3 \left(1 + \frac{1}{x}\right) > -1$. Ange den största negativa heltalslösningen.

Svar: -2

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Bestäm alla reella lösningar till ekvationen:

$$\ln(3 \sin x) = 2 \ln(-\sqrt{2} \cos x)$$

Lösning:

För att uttrycket skall vara väldefinierat krävs att $\sin x > 0$ och $\cos x < 0$, vilket betyder att x måste ligga i andra kvadranten. Då så är fallet, dvs. då $\frac{\pi}{2} < (x - 2\pi n) < \pi$ för något $n \in \mathbb{Z}$, gäller att den givna ekvationen är ekvivalent med:

$$\begin{aligned}\ln(3 \sin x) &= \ln(2 \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow 3 \sin x &= 2 \cos^2 x \\ \Leftrightarrow 3 \sin x &= 2 - 2 \sin^2 x \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{3}{2} \sin x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Låt $y = \sin x$ och lös andragradsekvationen:

$$\begin{aligned}y^2 + \frac{3}{2}y - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 &= 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Detta ger lösningarna $y_1 = \frac{1}{2}$ och $y_2 = -2$. Endast $y_1 = \frac{1}{2}$ är en lösning eftersom $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Lösning av $\sin x = 1/2$ ger lösningsskaran $\pi/6 + 2\pi n$ och $5\pi/6 + 2\pi n$. Endast $x = 5\pi/6 + 2\pi n$ ligger i andra kvadranten.

Svar: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$