

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

9 september 2023,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Jana Madjarova: 031-7723531

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talet $\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2}$ är lika med
(a) $3 - 4\sqrt{6}$; (b) $2\sqrt{6} - 3$; (c) $3 - 2\sqrt{6}$; (d) inget av (a)-(c).
2. Det största av de fyra talen $a = 3$, $b = \sqrt{6 + \sqrt{10}}$, $c = 6 - \sqrt{10}$, $d = \sqrt[3]{25}$, är
(a) a ; (b) b ; (c) c ; (d) d .
3. Mängden av alla reella x för vilka uttrycket $\sqrt{\frac{2}{2-x}} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ är definierat (och antar reella värden) är
(a) $[0, 2)$; (b) $(-\infty, -1] \cup [1, 2)$; (c) $[1, 2)$; (d) inget av (a)-(c).
4. En av lösningarna till ekvationen $5x^2 + 4x + c = 0$ är $-\frac{8}{5}$. Den andra lösningen är
(a) $\frac{4}{5}$; (b) $-\frac{4}{5}$; (c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.

5. Talet $\log_{\sqrt{2}} \left(\log_{\sqrt{3}} (\log_{\frac{1}{4}} 2^{-6}) \right)$ är lika med
 (a) 4; (b) 2; (c) -1 ; (d) inget av (a)-(c).
6. Antalet heltalslösningar till olikheten $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$ är
 (a) 0; (b) 1; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).
7. Mängden av alla lösningar till ekvationen $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1$ är
 (a) $(-\infty, 0]$; (b) $[0, \infty)$; (c) $\mathbb{R}$; (d) inget av (a)-(c).
8. Antalet lösningar till ekvationen $\sqrt{2x - 3} - \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}} = 0$ är
 (a) 0; (b) 1; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).
9. Om punkten $(a, \sqrt{3})$ ligger på grafen till funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$, så är a lika med
 (a) 27; (b) $3\sqrt{3}$; (c) $\sqrt[6]{3}$; (d) annat tal.
10. Om $\sin \alpha = p$ och $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, så är $\tan 2\alpha$ lika med
 (a) $-\frac{2p\sqrt{1-p^2}}{1-2p^2}$; (b) $\frac{2p\sqrt{1-p^2}}{1-2p^2}$; (c) $\pm \frac{2p\sqrt{1-p^2}}{1-2p^2}$; (d) inget av (a)-(c).
11. Alla lösningar till ekvationen $2\sin^2 x + 7\cos x = 5$ ges av
 (a) $\pm \frac{\pi}{3}$; (b) $\pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (c) $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (d) inget av (a)-(c).
12. En geometrisk talföljd har första element $a_1 = 6$ och kvot $q = \frac{1}{2}$. Summan av de sex första elementen är
 (a) $\frac{198}{16}$; (b) $\frac{189}{16}$; (c) $\frac{179}{16}$; (d) inget av (a)-(c).
13. Punkten P ligger på sidan AC i triangeln ABC och är sådan att $\frac{|CP|}{|PA|} = \frac{3}{5}$. Linjen genom P parallell med sidan AB skär sidan BC i punkten Q . Om $|PQ| = 6$ (längdenheter), så är $|AB|$ lika med
 (a) 10 l.e.; (b) 12 l.e.; (c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.
14. En triangel har sidlängderna $|AB| = 7$, $|BC| = 5$, $|CA| = 3$ längdenheter. Triangelns största vinkel är
 (a) vid hörnet A ; (b) vid ett annat av triangelns hörn;
 (c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

15. En triangel har sidlängderna $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CA| = 4$ längdenheter. Triangelns största vinkel är

- (a) vid hörnet A ; (b) vid ett annat av triangelns hörn;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Finn och ange det reella tal a för vilket ekvationen $x^2 - 2x + a - 1 = 0$ har två reella lösningar, varav den ena är lika med två gånger den andra.

Svar:

18. Lös ekvationen $(x^2 - 4) \log_3(x + 2) = 0$. Ange produkten av ekvationens lösningar.

Svar:

19. Lös ekvationen $(a + 1)(b + 1) = 10$, om det är känt att a och b är positiva heltal sådana att $a \leq b$. Ange värdet av produkten ab .

Svar:

20. Lös olikheten

$$\frac{2x - 1}{x + 3} \leq 1.$$

Ange antalet heltalslösningar.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\sqrt{x-3} \leq \sqrt{3x-7} - \sqrt{x-2}.$$

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

9 september 2023,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Jana Madjarova: 031-7723531

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talet $\sqrt{21^2 - 15^2} - \sqrt{150} + \sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2}$ är lika med

(a) $3 - 4\sqrt{6}$; (b) $2\sqrt{6} - 3$; (c) $3 - 2\sqrt{6}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Det största av de fyra talen $a = 3$, $b = \sqrt{6 + \sqrt{10}}$, $c = 6 - \sqrt{10}$, $d = \sqrt[3]{25}$, är

(a) a ; (b) b ; (c) c ; (d) d .

3. Mängden av alla reella x för vilka uttrycket $\sqrt{\frac{2}{2-x}} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ är definierat (och antar reella värden) är

(a) $[0, 2)$; (b) $(-\infty, -1] \cup [1, 2)$; (c) $[1, 2)$; (d) inget av (a)-(c).

4. En av lösningarna till ekvationen $5x^2 + 4x + c = 0$ är $-\frac{8}{5}$. Den andra lösningen är

(a) $\frac{4}{5}$; (b) $-\frac{4}{5}$; (c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.

5. Talet $\log_{\sqrt{2}} \left(\log_{\sqrt{3}} (\log_{\frac{1}{4}} 2^{-6}) \right)$ är lika med
 (a) 4; (b) 2; (c) -1; (d) inget av (a)-(c).
6. Antalet heltalslösningar till olikheten $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$ är
 (a) 0; (b) 1; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).
7. Mängden av alla lösningar till ekvationen $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1$ är
 (a) $(-\infty, 0]$; (b) $[0, \infty)$; (c) $\mathbb{R}$; (d) inget av (a)-(c).
8. Antalet lösningar till ekvationen $\sqrt{2x - 3} - \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}} = 0$ är
 (a) 0; (b) 1; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).
9. Om punkten $(a, \sqrt{3})$ ligger på grafen till funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$, så är a lika med
 (a) 27; (b) $3\sqrt{3}$; (c) $\sqrt[6]{3}$; (d) annat tal.
10. Om $\sin \alpha = p$ och $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, så är $\tan 2\alpha$ lika med
 (a) $-\frac{2p\sqrt{1-p^2}}{1-2p^2}$; (b) $\frac{2p\sqrt{1-p^2}}{1-2p^2}$; (c) $\pm \frac{2p\sqrt{1-p^2}}{1-2p^2}$; (d) inget av (a)-(c).
11. Alla lösningar till ekvationen $2\sin^2 x + 7\cos x = 5$ ges av
 (a) $\pm \frac{\pi}{3}$; (b) $\pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (c) $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (d) inget av (a)-(c).
12. En geometrisk talföljd har första element $a_1 = 6$ och kvot $q = \frac{1}{2}$. Summan av de sex första elementen är
 (a) $\frac{198}{16}$; (b) $\frac{189}{16}$; (c) $\frac{179}{16}$; (d) inget av (a)-(c).
13. Punkten P ligger på sidan AC i triangeln ABC och är sådan att $\frac{|CP|}{|PA|} = \frac{3}{5}$. Linjen genom P parallell med sidan AB skär sidan BC i punkten Q . Om $|PQ| = 6$ (längdenheter), så är $|AB|$ lika med
 (a) 10 l.e.; (b) 12 l.e.; (c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.
14. En triangel har sidlängderna $|AB| = 7$, $|BC| = 5$, $|CA| = 3$ längdenheter. Triangelns största vinkel är
 (a) vid hörnet A ; (b) vid ett annat av triangelns hörn;
 (c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

15. En triangel har sidlängderna $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CA| = 4$ längdenheter. Triangelns största vinkel är

- (a) vid hörnet A ; (b) vid ett annat av triangelns hörn;
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar: $-\frac{4}{27}$

17. Finn och ange det reella tal a för vilket ekvationen $x^2 - 2x + a - 1 = 0$ har två reella lösningar, varav den ena är lika med två gånger den andra.

Svar: $\frac{17}{9}$

18. Lös ekvationen $(x^2 - 4) \log_3(x + 2) = 0$. Ange produkten av ekvationens lösningar.

Svar: -2

19. Lös ekvationen $(a + 1)(b + 1) = 10$, om det är känt att a och b är positiva heltal sådana att $a \leq b$. Ange värdet av produkten ab .

Svar: 4

20. Lös olikheten

$$\frac{2x - 1}{x + 3} \leq 1.$$

Ange antalet heltalslösningar.

Svar: 7

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\sqrt{x-3} \leq \sqrt{3x-7} - \sqrt{x-2}.$$

Vi inleder med att bestämma definitions-
mängden : $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$
 $3x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$
 $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ (alla tre
måste gälla)

Vi får $x \geq 3$

Olikheten är ekvivalent med

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} \leq \sqrt{3x-7}.$$

Båda leden är nu icke-negativa, så kvadrering
leder till den ekvivalenta olikheten

$$x-3 + 2\sqrt{(x-3)(x-2)} + x-2 \leq 3x-7$$

$$2\sqrt{(x-3)(x-2)} \leq x-2.$$

För $x \geq 3$ är återigen båda leden ≥ 0 , så
vi kan kvadrera en gång till utan att riskera att
få falska lösningar :

$$4(x-3)(x-2) \leq (x-2)^2.$$

För $x \geq 3$ är faktorn $x-2$ positiv ($\neq 0$),
så vi kan förkorta och får då

$$4(x-3) \leq x-2 \Leftrightarrow 3x \leq 10.$$

Alla lösningar till den givna olikheten är
alltså alla x sådana att $3 \leq x \leq \frac{10}{3}$.