

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

11 september 2021,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Jana Madjarova: 031-7723531

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\frac{\sqrt{(-5)^2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ är lika med
(a) -5 ; (b) -2 ; (c) 2 ; (d) inget av (a)-(c).

2. Uttrycket $\frac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot a^{-4} \cdot (a+1)^0}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot a^{-5}}$ är för $a = 10$ lika med
(a) 50 ; (b) 80 ; (c) 100 ; (d) inget av (a)-(c).

3. Studenterna i en grupp tränar tennis och/eller friidrott. Om 13 studenter tränar tennis, 15 tränar friidrott och tre tränar båda sporterna, så är antalet studenter i gruppen
(a) 28 ; (b) 25 ; (c) 22 ; (d) inget av (a)-(c).

4. Uttrycket $\frac{6}{3-\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}-2} - \frac{5}{\sqrt{6}+1}$ lika med
(a) 5 ; (b) 6 ; (c) 7 ; (d) inget av (a)-(c).

5. Den största lösningen till ekvationen $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ är
- (a) 0; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).
6. Den minsta positiva heltalslösningen till olikheten $|3x - 4| < 5$ är
- (a) 3; (b) 1; (c) 0; (d) inget av (a)-(c).
7. Om $a = \log_5 3$, så är $\log_3 225$ lika med är
- (a) $2 + \frac{1}{a^2}$; (b) $2 - \frac{1}{a}$; (c) $2 + 2a$; (d) inget av (a)-(c).
8. För en rätvinklig triangel är summan av kateternas längder 23 l.e., medan hypotenusans längd är 17 l.e. Triangelns area är (i areaenheter)
- (a) 240; (b) 120; (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.
9. Fem givna tal har (aritmetiskt) medelvärde 30. Man vill lägga till ett sjätte tal så att det nya medelvärdet blir 40. Man måste då lägga till
- (a) 40; (b) 70; (c) 90; (d) annat tal.
10. Om $\tan \alpha = 2$, så är $\sin 2\alpha$ lika med
- (a) $-\frac{4}{5}$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $\pm \frac{4}{5}$; (d) inget av (a)-(c).
11. Talet p är reellt. Funktionen $f(x) = x^2 + 6x - p$ antar sitt minsta värde för x lika med
- (a) 0; (b) 3; (c) annat x -värde; (d) går inte att avgöra.
12. Om z är ett komplext tal, så gäller
- (a) $|z|^2 = |\bar{z}^2|$; (b) $|z + \bar{z}| > 0$;
(c) $z\bar{z} = z^2$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
13. En triangels tre höjder skär varandra utanför triangeln. Då gäller att
- (a) triangelns största vinkel är spetsig;
(b) triangelns största vinkel är rät;
(c) triangelns största vinkel är trubbig;
(d) det går inte att avgöra.
14. För triangeln ABC gäller att $AB = 2\sqrt{2}$ l.e., $BC = 3$ l.e. och vinkeln vid B är 135° . Sidan AC har då längden
- (a) $AC = \sqrt{5}$ l.e.; (b) $AC = -\sqrt{5}$ l.e.;
(c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.

15. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C . Sträckan CD är triangelns höjd mot hypotenusan (det vill säga $CD \perp AB$, $D \in AB$). Om $BC = 6$ och $BD = 4$ (längdenheter), så gäller att

(a) $AD = 5$ l.e.; (b) $AD = 9$ l.e.; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{12} + \frac{3}{7}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Lös ekvationen $5^{2x+1} = 5^x + 4$. Ange antalet (reella) lösningar.

Svar:

18. Lös olikheten $\frac{1}{1-x} < \frac{x-4}{5-x}$. Ange summan av ekvationens heltalslösningar. olikhetens

Svar:

19. Lös ekvationen $x^2 - 2kx - 1 = 0$, där k är en reell parameter. Ange det minsta k -värdet, för vilket avståndet mellan ekvationens lösningar är 3. =0

Svar:

20. Lös ekvationen $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$. Ange summan av de lösningar som ligger i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\log_3 x + \log_x 9 < 3.$$

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

11 september 2021,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Jana Madjarova: 031-7723531

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\frac{\sqrt{(-5)^2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ är lika med
(a) -5 ; (b) -2 ; (c) 2 ; (d) inget av (a)-(c).

2. Uttrycket $\frac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot a^{-4} \cdot (a+1)^0}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot a^{-5}}$ är för $a = 10$ lika med
(a) 50 ; (b) 80 ; (c) 100 ; (d) inget av (a)-(c).

3. Studenterna i en grupp tränar tennis och/eller friidrott. Om 13 studenter tränar tennis, 15 tränar friidrott och tre tränar båda sporterna, så är antalet studenter i gruppen
(a) 28 ; (b) 25 ; (c) 22 ; (d) inget av (a)-(c).

4. Uttrycket $\frac{6}{3-\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}-2} - \frac{5}{\sqrt{6}+1}$ lika med
(a) 5 ; (b) 6 ; (c) 7 ; (d) inget av (a)-(c).

5. Den största lösningen till ekvationen $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ är
 (a) 0; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).
6. Den minsta positiva heltalslösningen till olikheten $|3x - 4| < 5$ är
 (a) 3; (b) 1; (c) 0; (d) inget av (a)-(c).
7. Om $a = \log_5 3$, så är $\log_3 225$ lika med är
 (a) $2 + \frac{1}{a^2}$; (b) $2 - \frac{1}{a}$; (c) $2 + 2a$; (d) inget av (a)-(c).
8. För en rätvinklig triangel är summan av kateternas längder 23 l.e., medan hypotenusans längd är 17 l.e. Triangelns area är (i areaenheter)
 (a) 240; (b) 120; (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.
9. Fem givna tal har (aritmetiskt) medelvärde 30. Man vill lägga till ett sjätte tal så att det nya medelvärdet blir 40. Man måste då lägga till
 (a) 40; (b) 70; (c) 90; (d) annat tal.
10. Om $\tan \alpha = 2$, så är $\sin 2\alpha$ lika med
 (a) $-\frac{4}{5}$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $\pm \frac{4}{5}$; (d) inget av (a)-(c).
11. Talet p är reellt. Funktionen $f(x) = x^2 + 6x - p$ antar sitt minsta värde för x lika med
 (a) 0; (b) 3; (c) annat x -värde; (d) går inte att avgöra.
12. Om z är ett komplext tal, så gäller
 (a) $|z|^2 = |\bar{z}^2|$; (b) $|z + \bar{z}| > 0$;
 (c) $z\bar{z} = z^2$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
13. En triangels tre höjder skär varandra utanför triangeln. Då gäller att
 (a) triangelns största vinkel är spetsig;
 (b) triangelns största vinkel är rät;
 (c) triangelns största vinkel är trubbig;
 (d) det går inte att avgöra.
14. För triangeln ABC gäller att $AB = 2\sqrt{2}$ l.e., $BC = 3$ l.e. och vinkeln vid B är 135° . Sidan AC har då längden
 (a) $AC = \sqrt{5}$ l.e.; (b) $AC = -\sqrt{5}$ l.e.;
 (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.

15. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C . Sträckan CD är triangelns höjd mot hypotenusan (det vill säga $CD \perp AB$, $D \in AB$). Om $BC = 6$ och $BD = 4$ (längdenheter), så gäller att

(a) $AD = 5$ l.e.; (b) $AD = 9$ l.e.; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{12} + \frac{3}{7}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

$$-28/215$$

17. Lös ekvationen $5^{2x+1} = 5^x + 4$. Ange antalet (reella) lösningar.

Svar:

$$1$$

18. Lös olikheten $\frac{1}{1-x} < \frac{x-4}{5-x}$. Ange summan av ekvationens heltalslösningar.

olikhetens

Svar:

$$6$$

=0

19. Lös ekvationen $x^2 - 2kx - 1$, där k är en reell parameter. Ange det minsta k -värdet, för vilket avståndet mellan ekvationens lösningar är 3.

Svar:

$$-\sqrt{5}/2$$

20. Lös ekvationen $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$. Ange summan av de lösningar som ligger i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Svar:

$$-\frac{\pi}{4}$$

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\log_3 x + \log_x 9 < 3.$$

Definitionsmängd: $x > 0$
 $x \neq 1$

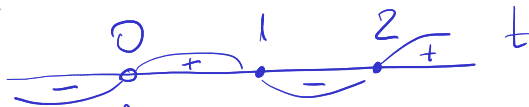
$$\log_x 9 = 2 \log_x 3 = \frac{2}{\log_3 x}$$

Sätt $t = \log_3 x$. Vi får $t \neq 0$, samt

$$t + \frac{2}{t} < 3 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0 \quad (*)$$

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$$

$$(*) : \quad \frac{(t-1)(t-2)}{t} < 0$$



$$\Rightarrow t + \frac{2}{t} < 3 \quad \text{för} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$$

$$\log_3 x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x \in (0, 1) \cup (3, 9) \\ \text{uppfyller } x > 0 \text{ och} \\ x \neq 1 \end{array}}$$