CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

14 september 2019,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 12:00–14:00

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.
Jana Madjarova: 031-7723531

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ är lika med

   (a) $-\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{2}-2$; (c) $\sqrt{2}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Uttrycket $\sqrt{(1-a)(1+a)^{-1}}-\sqrt{(1+a)(1-a)^{-1}}$ är för $a=\cos\dfrac{4\pi}{3}$ lika med

   (a) $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Den största lösningen till ekvationen $(x^2-36)\sqrt{5-x}=0$ är

   (a) -6; (b) 5; (c) 6; (d) inget av (a)-(c).

4. Antalet heltalslösningar till olikheten $\dfrac{x+14}{x+3}>3$ är

   (a) 4; (b) 5; (c) 6; (d) inget av (a)-(c).

5. Antalet positiva heltalslösningar till olikheten $(x^2-2x+2)(4-x^2)>0$, är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

6. Uttrycket $\log_2\left(\log_3\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)$ är lika med

(a) $-\log_2 6$; (b) $\dfrac{1}{\log_2 6}$; (c) -3; (d) inget av (a)-(c).

7. Om $a=\sqrt[3]{8}$ och $b=\ln\sqrt{a}$, så är talet $e^{-b}-\log_2\sqrt{a}$ lika med är

(a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$; (b) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$; (c) 0; (d) inget av (a)-(c).

8. Om $x^2+4y^2+2x-4y+2=0$, så är xy lika med är

(a) $-\dfrac{1}{2}$; (b) 0; (c) $\dfrac{1}{2}$; (d) inget av (a)-(c).

9. Uttrycket $\dfrac{\cos 780^\circ+\tan 405^\circ}{\sin(-930^\circ)}$ är lika med

(a) $1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; (b) 3; (c) annat tal; (d) uttrycket är odefinierat.

10. Om $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, och $0<\alpha<\pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

(a) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; (b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; (c) $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; (d) annat värde.

11. Funktionen $f(x)=12\sin x-5\cos x$ har största värde

(a) 7; (b) 13; (c) 17; (d) inget av (a)-(c).

12. Om z och w är komplexa tal, så gäller

(a) $|z|^2=z^2$; (b) $|z+w|=|z|+|w|$;
(c) $|zw|=|z|\cdot|w|$; (d) inget av (a)-(c)gäller generellt.

13. Sidlängderna a,b,c i en triangel uppfyller $a<b<c$. Då gäller att

(a) höjden mot sidan med längden a är längst av de tre höjderna i triangeln;
(b) höjden mot sidan med längden a är kortast av de tre höjderna i triangeln;
(c) minst två av triangelns höjder är lika långa;
(d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

14. För triangeln ABC gäller $AB = 5$ längdenheter, $BC = 3$ längdenheter, och $\angle ABC = 120°$. Längden av höjden mot sidan AC är då

(a) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$ l.e.; (b) $\dfrac{15\sqrt{3}}{14}$ l.e.; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

15. För romben $ABCD$ gäller att diagonalen BD har längden 6 längdenheter och att $\angle BAD = 60°$. Rombens area är då

(a) $18\sqrt{3}$ a.e.; (b) 18 a.e.; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{15}}{\frac{1}{21} - \frac{5}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\dfrac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Lös ekvationen $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$. Ange summan av alla reella lösningar.

Svar:

18. Lös ekvationen $2\sin^2 2x + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 1$. Ange summan av alla lösningar i intervallet $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Svar:

19. Givet är en rätvinklig triangel ABC med rät vinkel vid C och hypotenusa $AB = 2$ l.e. Vinkeln α vid hörnet A uppfyller

$$1 - \sin 2\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

Beräkna och ange triangelns area.

Svar:

20. Lös olikheten $\log_2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \geq -1$. Ange den största negativa heltalslösningen.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Bestäm alla reella tal p sådana att olikheten

$$\frac{x^2 + px}{x^2 + x + 1} < 3$$

gäller för alla reella x. Motivera!

Dugga 1, 14 september 2019 - SVAR

A.

1a
2d
3b
4b
5b
6c
7a
8a
9b
10d
11b
12c
13a
14b
15a

B.

16: $-\frac{224}{155}$
17: -1
18: $\frac{3\pi}{2}$
19: 1
20: -2

C. *Lösning:* Vi flyttar över alla termer till högerledet och skriver på gemensam nämnare; den givna olikheten är ekvivalent med

$$\frac{2x^2 + (3-p)x + 3}{x^2 + x + 1} > 0.$$

Nämnaren är positiv för alla reella x. Det som krävs är alltså att hitta alla reella p sådana att

$$2x^2 + (3-p)x + 3 > 0$$

för alla reella x. Kvadratkomplettering ger

$$2x^2 + (3-p)x + 3 = 2\left(\left(x + \frac{3-p}{4}\right)^2 - \left(\frac{3-p}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\right).$$

Koefficienten för x^2 är positiv, vilket betyder att uttrycket kommer att vara positivt för alla reella x om och endast om

$$\frac{3}{2} - \left(\frac{3-p}{4}\right)^2 = \frac{-p^2 + 6p + 15}{16} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 6p - 15 < 0.$$

Den sista olikheten gäller om och endast om p ligger strikt mellan de två nollställena till polynomet $t^2 - 6t - 15$. Vi får slutligen att den givna olikheten är sann för alla reella x om och endast om

$$3 - 2\sqrt{6} < p < 3 + 2\sqrt{6}.$$