CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

10 september 2016,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 13:00–15:00

OBS! Studenterna som läser Maskinteknik får inte lämna salen före 13:30.

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.
Anders Logg: 031-7725346 (främst M, 12:00–14:00)
Jana Madjarova: 073-7855697 (främst F och TM, 13:00–15:00)

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talet $\frac{1}{3}\sqrt{12+\frac{1}{4}} - \left(\frac{9\cdot 5^{-2}}{0,5\cdot 2^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ är lika med

   (a) $\frac{1}{6}$; (b) $\frac{1}{3}$; (c) $\frac{1}{5}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Talet $\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+2}$ är lika med

   (a) $3-2\sqrt{5}$; (b) $2+\sqrt{5}$; (c) 1; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $a = 3b+1$, och $ab = 30$, så är a^2+9b^2 lika med

   (a) 109; (b) 161; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

4. Den minsta lösningen till ekvationen $\sqrt{(2x+3)^2} = x$ är

   (a) -3; (b) -1; (c) annat tal; (d) ekvationen har ingen reell lösning.

5. Lösningen till ekvationen $\ln(x+8) = \ln 3 + \ln 5$ ligger i intervallet

   (a) $(-1, 1)$; (b) $(2, 3)$; (c) $(5, 8)$; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $a = \log_3 2$, så är $\log_9 8 + 3^a - \log_3 6$ lika med

   (a) 1; (b) $\dfrac{a+2}{2}$; (c) $a+2$; (d) inget av (a)-(c).

7. Om $\sin\alpha = t$, och $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

   (a) $\dfrac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$; (b) $-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; (c) $-\dfrac{|t|}{\sqrt{1-t^2}}$; (d) annat värde.

8. Om α är en spetsig vinkel sådan att $4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 1 = 0$, så tillhör α intervallet

   (a) $\left(0, \dfrac{\pi}{12}\right)$; (b) $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$; (c) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; (d) inget av (a)-(c).

9. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, där b är reellt, har en reell och en icke-reell lösning. Då gäller att

   (a) $b \neq 0$; (b) $c = 0$; (c) $c \neq 0$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla.

10. En liksidig triangel i det komplexa talplanet har två av sina hörn i 1 och 3. Triangelns tredje hörn kan då vara i

    (a) $2+i$; (b) $2+i\sqrt{2}$; (c) $2+\sqrt{3}$; (d) inget av (a)-(c).

11. Talet $(1-i)(1+i\sqrt{3})$ är lika med

    (a) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; (b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; (c) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; (d) inget av (a)-(c).

12. Funktionen $f(x) = \log_x(x^2+x+1)$ är definierad för

    (a) alla reella x; (b) alla $x > 0$; (c) alla $x \geq 0$; (d) inget av (a)-(c).

13. Givet är fyra tal med egenskapen att hur man än väljer tre av dem har dessa tre tal (aritmetiskt) medelvärde 2016. Alla fyra talens medelvärde är

    (a) 2672; (b) 2016; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

14. Antalet heltal n sådana att $\left(\dfrac{n+7}{2n+7}\right)^{-1} < 1$, är

(a) 7; (b) 8; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).

15. Funktionen $f(x) = 3\cos 2x + 4\sin 2x$, definierad för alla reella x, har största värde

(a) 7; (b) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$; (c) 5; (d) annat svar.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{8}}{\frac{2}{7}+\frac{3}{14}}.$$

Ange svaret på formen $\dfrac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 2, \\ xy &= 1. \end{cases}$$

Ange antalet lösningar.

Svar:

18. Konstruera och ange en funktion, definierad för alla reella tal, som har största värde 3 och minsta värde -1.

Svar:

19. En klass består av 14 barn, vars medelålder är 12 år. När läraren kommer in höjs medelåldern i rummet med tre år (ingen annan än de 14 eleverna och läraren finns i rummet). Beräkna och ange lärarens ålder.

Svar:

20. Lös ekvationen $x = \sqrt{16-6x-x^2} - 2$. Ange summan av alla lösningar.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$2\tan 2x \leq 3\tan x.$$

Dugga 1, 10 september 2016 - SVAR

A.

1b
2c
3c
4d
5c
6b
7c
8a
9a
10d
11a
12d
13b
14d
15c

B.

16: $-\frac{7}{20}$
17: 2
18: till exempel $f(x) = 2\sin x + 1$
19: 57
20: 1

C. *Lösning:* För att $\tan x$ och $\tan 2x$ ska vara definierade krävs att $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k$ godtyckligt heltal. Vi härleder först formeln för tangens av dubbla vinkeln

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$
$$[\text{dividera täljare och nämnare med } \cos^2 x \neq 0] = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Sätt nu $\tan x = t,\ t \neq \pm 1$. Olikheten som ska bevisas kan nu skrivas som

$$3t - \frac{4t}{1-t^2} \geq 0.$$

Efter enkla omskrivningar får vi den ekvivalenta olikheten

$$\frac{t(3t^2+1)}{t^2-1} = \frac{t(3t^2+1)}{(t+1)(t-1)} \geq 0.$$

Faktorn $3t^2+1$ är alltid positiv. Därmed behöver vi bara titta på vad resten av faktorerna har för tecken. Vi undersöker tecknen i intervallen $(-\infty, -1),\ (-1, 0],\ [0, 1),\ (1, \infty)$. I det första av dessa intervall har vi: $t < 0,\ t - 1 < 0,\ t + 1 < 0$, alltså är uttrycket negativt och detta intervall hör inte till lösningsmängden. I nästa intervall är tecknen (i samma ordning) $-, -, +$, uttrycket är positivt (0 i 0), alltså hör detta intervall till lösningsmängden. En undersökning av tecknen i återstående två intervall (gör den!) ger att lösningsmängden (för t) ges av $(-1, 0] \cup (1, \infty)$. Nu är det dags att påminna om att $\tan x = t$. Låt oss först titta $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funktionsvärdet för tangens kommer att ligga i de intervall som utgör lösningsmängden för t exakt när $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0] \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Eftersom funktionen tangens är π-periodisk får vi slutligen att den givna olikheten uppfylls om och endast om

$$x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi] \cup (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$