Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik

Skrivning i matematik - introduktionskursen (TMA970)

31 augusti 2013, 14:00–17:00

Examinator Jana Madjarova svarar på frågor per telefon, 073-7855697.
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–30.

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\dfrac{1+\sqrt{12}}{1-\sqrt{12}} + \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{121}} + \dfrac{2}{11}$ är lika med

   (a) -1; (b) 3; (c) $2-2\sqrt{3}$; (d) annat svar.

2. Om $a = \log_2 64$, och $b = \sqrt{a}$, så kan man dra slutsatsen att

   (a) $b < 0$; (b) $2 < b < 3$; (c) $b > 4$; (d) inget av (a)-(c).

3. Talet $\log_{2\sqrt{2}}\left(\log_3 9^8\right)$, är lika med

   (a) $\dfrac{2}{3}$; (b) $\dfrac{4}{3}$; (c) $\dfrac{8}{3}$; (d) inget av (a)-(c).

4. Talen $3+2\sqrt{2}$ och $3-2\sqrt{2}$ är nollställen till andragradspolynomet

   (a) $x^2+6x+17$; (b) x^2-6x+5; (c) $x^2-6x+17$; (d) inget av (a)-(c).

5. Antalet reella lösningar till ekvationen $\sqrt{x^2-10} = \sqrt{-3x}$ är

   (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

6. Om $m \boxplus n = m - n^m$, för alla positiva heltal m, n, så gäller för alla $m, n \in \mathbb{N}$ $(m, n > 0)$ att

   (a) $1 \boxplus n \geq 0$; (b) $m \boxplus 1 \geq 0$;
   (c) $m \boxplus n \neq 1$; (d) inget av (a)-(c).

7. Antalet heltalslösningar till olikheten $\ln(x^2 - 12) \leq \ln x$ är

(a) 8; (b) 5; (c) 4; (d) annat svar.

8. Antalet heltalslösningar till olikheten $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 3 - x^2} \geq 0$ är

(a) 1; (b) 2; (c) oändligt; (d) annat svar.

9. Om $\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$, och $\alpha, \beta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, så har $\sin(\alpha + \beta)$ värdet

(a) 0; (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (c) annat värde; (d) går inte att avgöra.

10. Om $\sin\alpha = t$ och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

(a) $\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$; (b) $\dfrac{|t|}{\sqrt{1-t^2}}$; (c) $\dfrac{-|t|}{\sqrt{1-t^2}}$; (d) annat värde.

11. Produkten av lösningarna till ekvationen $4^{x^2 - 10x} = 16^{-8}$ är

(a) -16; (b) -64; (c) 64; (d) annat svar.

12. Om $S_{100} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{100}}$, så gäller att $S_{100} =$

(a) $\dfrac{2^{101} - 1}{2^{100}}$; (b) $\dfrac{2^{100} - 1}{2}$; (c) $2(2^{101} - 1)$; (d) annat svar.

13. En parallellogram med sidlängder 4 och 3 l.e. och spetsig vinkel 60° har arean (i a.e.)

(a) $12\sqrt{3}$; (b) $6\sqrt{3}$; (c) $3\sqrt{3}$; (d) inget av ovanstående.

14. En parallellogram med diagonallängder 4 l.e. och 3 l.e. har arean (i a.e.)

(a) 6; (b) 12; (c) annat tal; (d) går ej att avgöra.

15. Antalet lösningar till ekvationen $\cos^2\alpha + \cos\alpha = 2$ i intervallet $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{13\pi}{2}\right)$ är

(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) inget av (a)-(c).

16. Antalet lösningar till ekvationen $2\cos^2\alpha + \cos\alpha = 1$ i intervallet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right)$ är

(a) 3; (b) 8; (c) 11; (d) inget av (a)-(c).

17. För alla $x < 0$ gäller att $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ är lika med

(a) 6; (b) 0;
(c) $-12x$; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla $x < 0$.

18. För alla $x > -2$ gäller att

(a) $|x+2| = x - 2$;
(b) $|x+2| = |x+1| + 1$;
(c) $|x+2| = |x+1| - 1$;
(d) inget av (a)-(c) gäller för alla $x > -2$.

19. Om två av sidorna i en triangel är 2 och 4 l.e., och vinkeln mellan dem är 60°, så är triangeln

(a) likbent; (b) rätvinklig;
(c) går ej att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

20. Om a, b, c är sidlängderna i triangeln ABC, $p = \frac{a+b+c}{2}$, och R är den omskrivna cirkelns radie, så är R lika med

(a) $R = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{4abc}$;

(b) $R = \dfrac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$;

(c) $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$;

(d) $R = \dfrac{4abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna $\dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}{\frac{3}{8}-\frac{1}{12}}$. Ange svaret på formen $\dfrac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

22. Ange det största parametervärde a, för vilket ekvationen $3x^2 + ax + 2a = 0$ har en (reell) dubbelrot.

Svar:

23. Givet funktionen $f(x) = \sin \dfrac{x}{x^2+1}$, ange $f'(0)$.

Svar:

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 (e^{-3x} - \sin \pi x + x)\, dx$.

Svar:

25. Ange det minsta heltalet som ar lösning till olikheten $\dfrac{x^2+8x+16}{(2-x)(x+3)} \geq 0$.

Svar:

26. Givet funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x$, ange dess lokala maximumvärde.

Svar:

27. Om $f(t) = 1 + 4t - t^2$, bestäm det minsta värdet $f(\sin x)$ kan anta när $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Svar:

28. Ange antalet heltalslösningar till olikheten $\ln x + \ln(3-x) \leq \ln 8 + \ln(2x+5)$.

Svar:

29. I parallellogrammen $ABCD$ är $\angle DBC = 45°$, $\angle BDC = 30°$, $|AB| = 5\sqrt{2}$ (längdenheter). Finn längden av sidan AD.

Svar:

30. Sidorna i en parallellogram har längderna 4 cm och 8 cm, och en av diagonalerna har längden 5 cm. Bestäm den andra diagonalens längd.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös ekvationen

$$3\sqrt{6+x-x^2}+2=4x.$$

Introduktionstenta F & TM, 2013-08-31 – svar

A.

1a
2b
3c
4d
5b
6b
7d
8d
9a
10c
11d
12a
13b
14d
15c
16c
17d
18d
19b
20c

B.

21: $\frac{32}{35}$

22: 24

23: 1

24: $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}e^{-3} - \frac{2}{\pi}$

25: -4

26: $\frac{7}{6}$

27: $\frac{1+4\sqrt{2}}{2}$

28: 2

29: 5 (l.e.)

30: $3\sqrt{15}\,\mathrm{cm}$

C. *Lösning:* Definitionsmängden ges av olikheten $6 + x - x^2 \geq 0$, som är ekvivalent med $-2 \leq x \leq 3$. En enkel omskrivning ger nu

$$3\sqrt{6 + x - x^2} = 4x - 2,$$

så att x måste uppfylla $x \geq \frac{1}{2}$. Alla lösningar finns alltså i intervallet $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$. Kvadrering av den omskrivna ekvationen ger

$$54 + 9x - 9x^2 = 16x^2 - 16x + 4,$$

eller

$$25x^2 - 25x - 50 = 25(x^2 - x - 2) = 0.$$

Lösningarna till denna andragradsekvation är $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$, av vilka endast $x_2 = 2$ är lösning till den ursprungliga ekvationen (x_1 är en s.k. falsk rot).