Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik
Skrivning i matematik - introduktionskursen
1 september 2012, 14:00–17:00

Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–30.

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3+\sqrt{11}}\cdot\sqrt{\sqrt{11}-3}}$ är lika med

   (a) 1; (b) 2; (c) $\sqrt{11}$; (d) annat svar.

2. Om $\dfrac{x}{y}=3$, så är uttrycket $\dfrac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^3+y^3}$ lika med

   (a) $\dfrac{20}{27}$; (b) $\dfrac{10}{7}$; (c) $\dfrac{1}{12}$; (d) annat svar.

3. Om $a=\log_{11}121+\log_{\sqrt{2}}64-7^{\log_7 2}$, så gäller att

   (a) $a=2$; (b) $a=12$; (c) $a=7$; (d) inget av (a)-(c).

4. Ekvationen $2^{x-1}\cdot 5^{x-1}=0,1\cdot 10^{2x+5}$ har lösningen

   (a) -3; (b) -4; (c) -5; (d) inget av (a)-(c).

5. Funktionen $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-4x+1=0$ har lokalt maximum för

   (a) -1; (b) 4; (c) -1 och 4; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $x \boxplus y = x + y - xy$, för alla reella tal x, y, så gäller *inte* att

(a) $x \boxplus y = y \boxplus x$;
(b) $x \boxplus 0 = x$;
(c) $x \boxplus 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
(d) $x \boxplus x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Summan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ är geometrisk. Om $a_1 + a_3 + a_5 = 455$, och $a_2 + a_4 + a_6 = 1365$, så är kvoten q lika med

(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) annat svar.

8. Uttrycket $\dfrac{\cos^2 10° - \sin^2 10°}{\cos 20°}$ är lika med

(a) $\dfrac{1}{\cos 20°}$; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) 0; (d) annat svar.

9. Om $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, så har $\sin 2\alpha$ värdet

(a) $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (b) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (c) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; (d) annat värde.

10. Om $\sin\alpha = t$ och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

(a) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{-t}$; (d) annat värde.

11. Om $e^a = 32$, så är $\ln 4$ lika med

(a) $\dfrac{2a}{5}$; (b) $\dfrac{a}{5}$; (c) $\dfrac{a^2}{5}$; (d) annat svar.

12. Om $S_{1000} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{1000}}$, så gäller att $S_{1000} =$

(a) $\dfrac{2^{1000}-1}{2}$; (b) $2(2^{1001}-1)$; (c) $\dfrac{2^{1001}-1}{2^{1000}}$; (d) annat svar.

13. En romb med sidlängd 4 l.e. och spetsig vinkel 45° har arean (i a.e.)

(a) $4\sqrt{2}$; (b) 16; (c) $8\sqrt{2}$; (d) inget av ovanstående.

14. En romb med diagonallängder 4 l.e. och 3 l.e. har arean (i a.e.)

(a) 6; (b) 12; (c) annat tal; (d) går ej att avgöra.

15. Den största heltalslösningen till olikheten $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+1} > 0$ är

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

16. Den största heltalslösningen till olikheten $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+1} \geq 0$ är

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

17. För alla $x < -5$ gäller att

(a) $|\,x+5| = -x+5$;
(b) $|\,x+5| > |\,x|$;
(c) $|\,x| > |\,x+1|$;
(d) inget av ovanstående.

18. För alla $x > 5$ gäller att

(a) $|\,x+5| = x-5$;
(b) $|\,x+5| > |\,x|$;
(c) $|\,x| > |\,x+1|$;
(d) inget av ovanstående.

19. Om a, b, c är sidlängderna i triangeln ABC och r är den inskrivna cirkelns radie så är triangelns area lika med

(a) $\dfrac{(a+b+c)\,r}{3}$; (b) $\dfrac{a+b+c}{2r}$; (c) $\dfrac{(a+b+c)\,r}{2}$; (d) $\dfrac{(a+2b+c)\,r}{2}$.

20. Om a, b, c är sidlängderna i triangeln ABC, och $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, så är triangelns area lika med

(a) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
(b) $\sqrt{p(p+a)(p+b)(p+c)}$;
(c) $\sqrt{p-2a)(p-2b)(p-2c)}$;
(d) $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{7}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

22. Ange den största lösningen till ekvationen $3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Svar:

23. Givet funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 7}$, ange $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Svar:

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^3 - \sin 2x + \cos x)\, dx$.

Svar:

25. Om funktionen f är sådan att $f(x+3) = 7x - 1$, ange $f(10)$.

Svar:

26. Ange den minsta lösningen till olikheten $x(x+1) \leq 0$.

Svar:

27. Ange den minsta lösningen till ekvationen $\sqrt{2-x} = 10 + x$.

Svar:

28. Lös ekvationen $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$. Ange antalet lösningar i $[0, 2\pi]$.

Svar:

29. Ange det största heltalet som är lösning till olikheten $\dfrac{|\,x+3|}{x^2+1} \geq 1$.

Svar:

30. Sträckan CD är höjd mot hypotenusan i den rätvinkliga triangeln ABC. Ange längden av kateten AC om $|AD| = 4$ cm och $|DB| = 5$ cm.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$|\,x^2 - 5x + 2| \leq 4.$$

Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik
Facit till skrivning i matematik - introduktionskursen
1 september 2012

A

1b, 2d, 3b, 4c, 5a, 6d, 7b, 8d, 9b, 10d, 11a, 12c, 13c, 14a, 15a, 16b, 17c, 18b, 19c, 20a;

B

21. $-\dfrac{46}{7}$;
22. $\dfrac{-7+\sqrt{73}}{6}$;
23. $-\dfrac{41}{196}$;
24. $\dfrac{\pi}{1024}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}$;
25. 48;
26. -1;
27. -7;
28. 2;
29. 2;
30. 6 cm.

C

Lösning: Polynomet $p(x) = x^2 - 5x + 2$ har nollställena $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Vi har $p(x) < 0$ för $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, och $p(x) \geq 0$ för $x \leq \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ och för $x \geq \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Fall 1: $x^2 - 5x + 2 \geq 0$, d.v.s. $x \in \left(-\infty, \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$

Olikheten blir då $x^2 - 5x - 2 \leq 0$. Denna uppfylls för $x \in \left[\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$. Eftersom x dessutom måste vara sådant att $x^2 - 5x + 2 \geq 0$, får vi att olikheten $|\, x^2 - 5x + 2| \leq 4$ uppfylls för $x \in \left[\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right]$ och för $x \in \left[\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$.

Fall 2: $x^2 - 5x + 2 < 0$, d.v.s. $x \in \left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$

Olikheten som ska gälla blir nu $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Den uppfylls för $x \leq 2$ samt för $x \geq 3$. Som ovan får vi nu lösningsintervallen $\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}, 2\right]$ och $\left[3, \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Lösningen till den givna olikheten ges alltså av mängden

$$\left[\frac{5-\sqrt{33}}{2}, 2\right] \cup \left[3, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$$