OBS! Denna samling av matematiska definitioner och satser är inofficiell och gjorde av studenter.
Vi reserverar oss vid eventuella felskrivningar.

Matematiska Definitioner & Satser - Envariabelanalys

Robin Andersson

27 november 2012

Innehåll

1 Inledning **3**

2 Definitioner **4**
2.1 Definition av en funktion 4
2.2 Definition för kontinuitet 4
2.3 Definition för kontinuitet i en punkt och mängd 4
2.4 Surjektion 4
2.5 Injektion 4
2.6 Bijektion 5
2.7 Definition av en deriverbar funktion 5
2.8 Ett standardgränsvärde 5

3 Satser **6**
3.1 Faktorsatsen för polynom 6
3.2 Eventuella rationella nollställen till polynom 6
3.3 Binomialsatsen 7
3.4 Räkneregel för gränsvärden 8
3.5 Talföljden vars gränsvärde kallas e 9
3.6 Deriverbarhet implicerar kontinuitet 11
3.7 Kedjeregeln 12
3.8 Derivatan av en invers funktion 12
3.9 Derivatan av exponentialfunktionen 13
3.10 Derivatan av några trigonometriska funktioner 13
3.11 Om derivatan i lokala extrempunkter 13
3.12 Medelvärdessatsen (Lagrange) 14
3.13 Om derivatan för en funktion är noll på ett intervall, så är funktionen konstant på detta intervall 16
3.14 Bolzano-Weierstrass' sats 16
3.15 Partiell integration (primitiva funktioner) 16
3.16 Variabelsubstition (primitiva funktioner) 17
3.17 Integralkalkylens medelvärdessats 17
3.18 Integralkalkylens (analysens) huvudsats 18
3.19 Jämförelsesatsen (generaliserade integraler) 19

1 Inledning

Denna samling av matematiska definitioner och satser berör matematisk analys i en variabel. Innehållet är ur kursen *Inledande matematisk analys*, som undervisas under första läsåret på Teknisk fysik och Teknisk matematik på Chalmers tekniska högskola.

Vid eventuella synpunkter eller identifierade fel, kontakta gärna *robiand@student.chalmers.se*.

2 Definitioner

2.1 Definition av en funktion

En (reell) funktion f med definitionsmängd D_f är en regel som för varje $x \in D_f$ ger ett entydligt bestämt värde $y = f(x)$. Mängden av alla möjliga y, d.v.s. alla värden f antar, kallas värdemängden för f och betecknas V_f.

2.2 Definition för kontinuitet

En funktionen f är kontinuerlig i x ($x \in D_f$) om gränsvärdet

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

f sägs vara kontinuerlig om f är kontinuerlig i alla $x \in D_f$.
Om f inte är kontinuerlig i $x \in D_f$ så är den diskontinuerlig i x.

2.3 Definition för kontinuitet i en punkt och mängd

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \in D_f, x_0 \text{ hopningspunkt till } D_f$$

Definition:

$$f \text{ kallas kontinuerlig i punkten } x_0 \text{ om}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition:

$$f \text{ kallas kontinuerlig i D om}$$

$$f \text{ är kontinuerlig i } x \ \forall x \in D_f$$

2.4 Surjektion

$$f : X \to Y$$

f kallas surjektiv om

$$\forall y \in Y \ \exists \ x \in X : f(x) = y \qquad \text{t.ex. } y = x^3$$

2.5 Injektion

$$f : X \to Y$$

f kallas injektiv om

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{t.ex. } y = x^2 \text{ är ej injektiv}$$

2.6 Bijektion

f kallas bijektiv om den är både injektiv och surjektiv t.ex. $y = 2x + 1$

2.7 Definition av en deriverbar funktion

$$f : D_f \longleftrightarrow \mathbb{R}$$

x_0 inre punkt för D_f, d.v.s. x_0 ligger i D_f tillsammans med en hel omgivning.

def : f kallas derivarbar i x_0 om:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Om gränsvärdet (ovan) existerar), så kallas det $f : s$ derivata i x_0 och betecknas med $f'(x_0)$.

2.8 Ett standardgränsvärde

Definition av ett gränsvärde

def :

$$f: \quad D_f \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x_0 \; hopningspunkt \; till \; D_f$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{om,}$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D_f, \; 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \; gäller \; |f(x) - \ell| < \varepsilon$

3 Satser

3.1 Faktorsatsen för polynom

Beviset visas åt två olika håll. Först bevisas det åt höger vilket indikeras med en lång högerpil, sedan bevisas det åt andra hållet vilket indikeras med en lång vänsterpil.

$P(x) = (x - \alpha)Q(x), \deg\, Q = \deg\, P - 1$

Bevis

$$\Longrightarrow$$

Givet : $P(\alpha) = 0$. Att bevisa: $P(x) \stackrel{?}{=} (x - \alpha)Q(x)$

Vi vet att: $P(x) = \underbrace{(x - \alpha)}_{\neq 0} Q(x) + R(x)$, deg $R < \deg\,(x - \alpha) = 1$

$$\Rightarrow R = konstant$$

Sätt: $x = \alpha$

$$\underbrace{P(\alpha)}_{=0} = \underbrace{(\alpha - \alpha)Q(\alpha)}_{=0} + R \Rightarrow R = 0 \Rightarrow P(x) = (x - \alpha)Q(x) \qquad \square$$

$$\Longleftarrow$$

$$Givet: \; P(x) = (x - \alpha)Q(x), \text{ då } P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \; \alpha \text{ nollställe till p} \qquad \square$$

3.2 Eventuella rationella nollställen till polynom

Sats:

Det finns inget rationellt tal vars kvadrat är 2.

Bevis:

$$x^2 - 2 = 0$$

Eventuella rationella rötter är då $\pm 1, \pm 2$.

Insättning av dessa rötter visar att $x^2 - 2 \neq 0$.

$$\Rightarrow \nexists \text{ rationella rötter} \qquad \square$$

3.3 Binomialsatsen

$$(a+b)^n \qquad (a+b) \neq 0$$

Om $a = b = 0$ är detta ointressant, så låt oss säga:

$$a \neq 0$$

$$(a+b)^n = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n(1+x)^n \qquad x = \frac{b}{a}$$

$(1+x)^n$ är ett polynom av grad n.

Newtons Binomialsats:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{k}x^k + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad \subset \mathbb{C}(OK!),\ n \in \mathbb{N}$$

def:

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}^{\text{k st}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k}_{k!}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k) \cdot ... \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vi inleder med bevis för två hjälpsatser som kommer att användas under beviset av *Newtons binomialsats*.

Hjälpsats 1: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad k =\ 1, 2,...,n-1$

Bevis:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad \square$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad \binom{n}{0} \overset{def}{=} 1 \left(= \binom{n}{n}\right)$$

Hjälpsats 2: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad k = 1, 2,...,n-1$

Bevis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\underbrace{(n-k)!}_{((n-1)-(k-1))}} + \frac{(n-1)!}{k!\underbrace{(n-1-k)!}_{((n-1)-k)}} =$$

$$= \frac{\cancel{(n-1)!k} + (n-\cancel{k})(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad \square$$

Nu följer beviset av själva binomialsatsen:

I Undersök $n = 1$

$$VL = (1+x)^1 = 1 + x$$

$$HL = \binom{n}{0}x^0 + \binom{1}{1}x = 1 + x$$

$$VL = HL \text{ för } n = 1, OK!$$

II Antag att $U(m)$ sant för något tal m

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^k$$

III Är då påståendet sant för $n = m + 1$*?* d.v.s. nästföljande tal

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m \cdot (1+x) \overset{\text{ind.antagandet}}{=} (1+x) \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot (x^k + x^{k+1}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^{k+1} =$$

$$\underbrace{=}_{\textit{Sätt: } l=k+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^k + \sum_{\overset{k}{\cancel{l}}=1}^{m+1} \binom{m}{\overset{k}{\cancel{l}} - 1} \cdot x^{\overset{k}{\cancel{l}}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \cdot x^k =$$

$$= \binom{m}{0} \cdot x^0 + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right)}_{=\binom{m+1}{k} \textit{ (hjälpsats 2)}} \cdot x^k + \binom{m}{m} \cdot x^{m+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} \cdot x^k + x^{m+1} \qquad \square$$

$\Rightarrow$ Enligt induktionsaxiomet är påståendet sant för alla $n \in \mathbb{N}$

3.4 Räkneregel för gränsvärden

Detta är ett bevis för **en** räkneregel för gränsvärden.

Sats:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + \ell$$

Bevis:

$$?\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D_f \cap D_g \backslash \{x_0\} :$$
$$: |x - x_0| < \delta_\varepsilon, \, | \, (f(x) + g(x)) - (L + \ell)| < \varepsilon.$$

Tag $\varepsilon > 0$.

$$|(f(x) + g(x)) - (L + \ell)| = |(f(x) - L) + (g(x) - \ell)| \underset{triangelolikheten}{\leq}$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - \ell|.$$

($\varepsilon > 0$ redan valt)

$$\exists \, \mu_\varepsilon > 0 : \forall \, x \in D_f \backslash \{x_0\} : |x - x_0| < \mu_\varepsilon, \, |f(x) - L| < \varepsilon,$$

$$\exists \, \eta_\varepsilon > 0 : \forall \, x \in D_g \backslash \{x_0\} : |x - x_0| < \eta_\varepsilon, \, |g(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Välj $\delta_\varepsilon = \min(\mu_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$, då gäller

$$\forall x \in D_f \cap D_g \backslash \{x_0\} : |x - x_0| < \delta_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \text{ och } |g(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in D_f \cap D_g \backslash \{x_0\} : |x - x_0| < \delta_\varepsilon, \, | \, (f(x) + g(x)) - (L + \ell)| \leq$$
$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - \ell| < 2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + \ell. \square$$

3.5 Talföljden vars gränsvärde kallas e

Sats: Följden $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ är växande och uppåt begränsad ($f(n) = a_n$).
Bevis:

$$?a_n \text{ växande } \Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \underset{*}{\geq}$$

(Vid $*$, bernoullis olikhet. $x = -\dfrac{1}{(n+1)^2} > -1$.)

$$\geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = 1-\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^3} =$$

$$= 1+\frac{n^2+2n+1-n^2-n-n}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

$\Rightarrow$ följden är växande!

Men är följden uppåt begränsad? $\quad ?\exists\, C : a_n \leq C \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+...+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot ...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+...+1\frac{1}{n^n} = 1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}+...+$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot ...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}+...+\frac{1}{n^n} \leq$$

$$\leq 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n} <$$

$$< 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+...+\frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot ...\cdot 2}_{k-1}}+...+\frac{1}{1\cdot 2^{n-1}} =$$

$$= 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

$$\Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ växande och uppåt begränsad av } 3$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to\infty} a_n (\leq 3) \qquad \square$$

def:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

.

3.6 Deriverbarhet implicerar kontinuitet

Sats:

Om f är deriverbar i x_0, så är f kontinuerlig i x_0.

Bevis:

Givet: : $\exists \lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$? \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ (Kontinuitet i } x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \; \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

$$\text{gäller } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon$$

$$x > x_0 \qquad (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) < f(x) - f(x_0) < (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

$$x < x_0 \qquad (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > f(x) - f(x_0) > (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

Instängningsregeln ger nu:

$$x > x_0 \qquad \underbrace{(f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)}_{\to 0} < f(x) - f(x_0) < \underbrace{(f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)}_{\to 0}$$

$$x < x_0 \qquad \underbrace{(f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)}_{\to 0} > f(x) - f(x_0) > \underbrace{(f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \longrightarrow 0 \text{ ty VL} \wedge \text{HL} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f \text{ kontinuerlig i } x_0 \qquad \square$$

3.7 Kedjeregeln

Sats: Om f är deriverbar i $g(x_0)$ och g är deriverbar i x_0, så är den sammansatta funktionen $\underbrace{f(g(x))}_{f \circ g}$ deriverbar i x_0, och $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Bevis: Vi vet att:

$$\exists \; A = f'(g(x_0)) : f(g(x_0) + k) - f(g(x_0)) = Ak + k\varepsilon_1(k), \text{ där } \varepsilon_1 \underset{k \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\exists \; B = g'(x_0) : g(x_0 + h) - g(x_0) = Bh + h\varepsilon_2(h), \text{ där } \varepsilon_2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$?\exists \; C : f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = Ch + h\varepsilon(h), \text{ där } \varepsilon \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Låt $k = g(x_0 + h) - g(x_0)$

$$f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + k) - f(g(x_0)) = Ak + k \cdot \varepsilon_1(k) =$$
$$= A\left(g(x_0 + h) - g(x_0)\right) + \left(g(x_0 + h) - g(x_0)\right) \cdot \varepsilon_1(k) =$$
$$= ABh + Ah \cdot \varepsilon_2(h) + (Bh + h \cdot \varepsilon_2(h)) \cdot \varepsilon_1(Bh + h \cdot \varepsilon_2(h)) =$$

$$= Abh + h\underbrace{(\overbrace{A\varepsilon_2(h)}^{\to 0} + B \cdot \varepsilon_1 \overbrace{(Bh + h \cdot \varepsilon_2(h))}^{\to 0} + \overbrace{\varepsilon_2(h)}^{\to 0} \cdot \varepsilon_1 \overbrace{(Bh + h \cdot \varepsilon_2(h))}^{k})}_{=\varepsilon(h)}$$

Sätt: $k = Bh + h \cdot \varepsilon_2(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists (f \circ g)'(x_0) = A \cdot B = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \qquad \square$$

3.8 Derivatan av en invers funktion

Sats:

$f:\ D_f \longrightarrow V_f$, $\exists\ f^{-1}$ *kontinuerlig*

$$x_0 \in D_f,\ \exists f'(x_0) \neq 0$$
$$f(x_0) = y_0$$
$$\Rightarrow \exists\ (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bevis:

$$\frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} \qquad ?\ \exists \lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k}$$

$$f^{-1}(y_0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$$
$$f^{-1}(y_0 + k) = x_k \Leftrightarrow f(x_k) = y_0 + k$$

Låt $x_k = x_0 + h$, *d.v.s. låt* $h = x_k - x_0 = f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)$

$$\Leftrightarrow\ f(x_0) + k = f(x_0 + h) \qquad k = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Alltså:

$$\frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} =$$
$$\frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\neq 0} \qquad \square$$

3.9 Derivatan av exponentialfunktionen

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{\overbrace{x - x_0}^{\to 0}} - 1}{\underbrace{x - x_0}_{\to 0}} \xrightarrow[x \to x_0]{} e^{x_0} \qquad \square$$

3.10 Derivatan av några trigonometriska funktioner

Härledning av $D(\sin(x))$

$$f(x) = \sin(x) \qquad \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}}}_{\to 1} = \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \xrightarrow[x \to x_0]{} \cos x_0$$

3.11 Om derivatan i lokala extrempunkter

Sats (Fermat's sats): $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 inre punkt i D_f.
f har lokalt extremum, f deriverbar i x_0.

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Bevis:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Säg att $f(x)$ har lokalt maximum i x_0, enligt definition då:

$$\exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \; \forall x : |x - x_0| < \delta$$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) < D_f$ för tillräckligt litet $\delta > 0$, ty x_0 inre punkt till D_f

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$WLOG, |h| < \delta \Rightarrow |(x_0 + h) - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \qquad \forall h : |h| < \delta$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{|h|} \qquad \begin{cases} \geq 0, & \text{för } h < 0. \\ < 0, & \text{för } h > 0. \end{cases}$$

$$\begin{gathered} \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \\ = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \end{gathered} \tag{1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \text{ och } f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

Ekvation (1) kan skrivas på ett *snyggare* sätt om önskat med en klammer, där sista gränsvärdet skall stå ensamt till höger om de andra två.

3.12 Medelvärdessatsen (Lagrange)

Detta bevis genomförs med hjälp av två andra satser. Vi börjar med att formulera satserna Rolles sats vilket följs av ett bevis, det beviset visas sedan med hjälp av *Weierstrass sats*. Efter det följer beviset för Lagranges medelvärdessats.

Rolles sats:

$$f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \text{ kontinuerlig i } [a,b], \qquad f \text{ deriverbar i } (a,b)$$

$$f(b) = f(a)$$

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b):\ f'(\xi) = 0$$

Bevis för Rolles sats:

Vi har två följande fall:

$$1.\ f \equiv const. = f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow f' \equiv (0) \text{ i } (a,b)$$

$$2.\ f \not\equiv constant$$

$$\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0) \neq f(a) = f(b)$$

$$WLOG\ f(x_0) > f(a) = f(b)$$

Sats (*Weierstrass*):

En kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall antar både ett största och minsta värde i intervallet.

$$\Rightarrow \exists\, x_1 \in [a,b] : f(x_1) = \max\ f(x),\ x \in [a,b]$$

$$x_1 \neq a, x_1 \neq b, \text{ ty } f(x_1) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$$
$$\Rightarrow x_1 \text{ är inre punkt, } x_1 \in (a,b)$$
$$\Rightarrow f \text{ har lokalt maximum i den inre punkten}$$
$$x_1 \Rightarrow f'(x_1) = 0, \text{ tag } \xi = x_1$$

Nu följer Lagranges medelvärdessats:
Sats:

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \text{ kontinuerlig i } [a,b], \exists\, f' \text{ i } (a,b)$$
$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bevis:
Vi kommer att konstruera en funktion φ som uppfyller villkoren i Rolles sats och som är "nära släkt"med f.

$$k = \text{riktningskoeffecienten} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + m$$

$$x = a : \; f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a + m$$
$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$$
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)\,, \varphi(x) \text{ kontinuerlig i } [a,b]$$
$$\exists\, \varphi'(x) \text{ i } (a,b), \text{ ty } f \text{ är deriverbar}$$
$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(a-a) = 0$$
$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$$
$$\Rightarrow \varphi \text{ uppfyller villkoren i Rolles sats } \Rightarrow \; \exists\, \xi \in (a,b) : \varphi'(\xi) = 0$$
$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}; \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

3.13 Om derivatan för en funktion är noll på ett intervall, så är funktionen konstant på detta intervall

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \exists\, f' \text{ i det inre av } I \qquad f \text{ kontinuerlig i } I.$$

$$f' \equiv 0 \text{ i } I$$

$$f \equiv C \text{ i } I.$$

Bevis:

Tag $x_1, x_2 \in I$.

$\Rightarrow \exists \xi$ mellan x_1, x_2 : $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = f \equiv C\,\square$

3.14 Bolzano-Weierstrass' sats

Om f är kontinuerlig i ett slutet och begränsat intervall så antar f både ett största och minsta värde i intervallet.

3.15 Partiell integration (primitiva funktioner)

f, g är sådana att derivator och integraler finns.

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Bevis:

$$?(VL)' = (HL)'$$

I både VL och HL står det en integral som tar hand om konstanterna.

$$D(VL) \stackrel{def}{=} f'(x) \cdot g(x)$$

$$D(HL) = D(f(x)g(x)) - D\left(\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x\right) =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = D(VL) \qquad \square$$

3.16 Variabelsubstition (primitiva funktioner)

Givet en funktion f, F är primitiv till f, g.

$$F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Bevis:

$$D(VL) = D(F(g(x))) = F'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$$= f(g(x)) \cdot g'(x) = D(HL) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \square$$

3.17 Integralkalkylens medelvärdessats

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \text{ kontinuerlig i } [a,b]$$

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Bevis:

$$f \text{ kontinuerlig i } [a,b]$$

$\Rightarrow \exists$ både ett största och minsta värde för f i $[a,b]$ enligt Weierstrass sats.

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M \text{ i } [a,b] \overset{ty\, m,f,M\, integrerbara}{\Rightarrow} \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \overset{enl. lineariteten}{=} m\int_a^b 1\,\mathrm{d}x \overset{ty \int_a^b 1\,\mathrm{d}x=(b-a)}{=} m(b-a)$$

Detsamma gäller för M

$$\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = M(b-a)$$

$$\Rightarrow m\underbrace{(b-a)}_{>0} \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\underbrace{(b-a)}_{>0} \Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}}_{=\mu} \leq M$$

Alltså: $m \leq \mu \leq M \overset{\text{m och M är två } f-\text{värden}}{\Rightarrow} \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu.$

Enligt satsen om mellanliggande värden, ty f är kontinuerlig.

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

för något $\xi \in [a,b]$ $\square$

3.18 Integralkalkylens (analysens) huvudsats

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f \text{ kontinuerlig i } [a,b]$$

$$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ är en primitiv funktion till } f \text{ i } [a,b]$$

Bevis:

$$?\exists\, F'=f$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\overset{\text{def. för } F}{=}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h}=$$

$$\underset{\text{ty}\left(\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f\right)}{=}\frac{\int_a^x \cancel{f(t)}\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x \cancel{f(t)}\,\mathrm{d}t}{h}=$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{enl.int.kalk.medelv.sats.}{\overset{h>0,f \text{ kontinuerlig}}{=}} \frac{1}{h}f(\xi)(x+h-x)\quad \xi \text{ ligger mellan } x \text{ och } x+h$$

$$=f(\xi)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x) \text{ ty } f \text{ är kontinuerlig}$$

$$h\longrightarrow 0\Rightarrow \xi\longrightarrow x, \text{ ty } \xi \text{ ligger mellan } x \text{ och } x+h$$

Om $b<a$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\underbrace{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x}_{OK,b<a}=-f(\xi)(a-b)=f(\xi)(b-a)$$

funkar även för $h<0$.

$$\Rightarrow \exists\, F'(x)=f(x)\qquad\square$$

3.19 Jämförelsesatsen (generaliserade integraler)

$$f,g:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f,g \text{ är kontinuerliga}$$

$$0\le f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,\infty)$$

$\Rightarrow$ I. Om $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent så är även $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent

II. Om $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ är divergent så är även $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ också divergent.

Bevis: I. Givet: $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.

$$F(p) = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_a^p g(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{växande funktion}} \underset{ty\ g\geq 0}{\leq} \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = A \text{ (ett tal)}$$

$$F(p) \text{ växande; uppåt begränsad av } A$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{p\to\infty} F(P) = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ är konvergent.}$$

II. Antag motsatsen, $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent

$\Rightarrow$ enligt I. $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, motsägelse! $\square$