TMA690
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F3 / TM3
Datum: 2015-01-15, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Anders Martinsson, tel. 0703088304
==

1. Lös ekvationen
$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
då $u(0,y) = y^3$. (5p)

2. Låt $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < 25\}$.
a) Låt $u = u(x,y,z)$ uppfylla $\Delta u = 0$ i D och $u = z^2$ på ∂D. Bestäm $u(0,0,0)$. (4p)
b) Låt $u = u(t,x,y,z)$ vara definierad för $t \geq 0$ och $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ och antag att
$$\begin{aligned} &u_{tt} = \Delta u, \\ &u(0,x,y,z) = f(x,y,z), \\ &u_t(0,x,y,z) = 0, \end{aligned}$$
där $f = 25 - x^2 - y^2 - z^2$ då $(x,y,z) \in D$ och $f = 0$ då $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Bestäm $u(1,7,0,0)$. (4p)

3. Låt $u = u(t,x)$ vara en lösning till värmeledningsproblemet
$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 - 1)u, \quad (0 < x < 1, t > 0) \\ &u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad (t \geq 0) \\ &u(0,x) = \sqrt{x(1-x)} \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$
a) Visa att för godtyckligt $t \geq 0$ så gäller uppskattningen
$$\int_0^1 (u(t,x))^2\,dx \leq \frac{1}{6}.$$
(5p)
b) Visa att $u(t,x) \leq \frac{1}{2}$ för alla $t \geq 0$ och $0 \leq x \leq 1$. (3p)

4. a) Låt u vara en distribution. Det är frestande att definiera Fouriertransformen $\hat{u}$ av u genom att låta $\hat{u}[\phi] := u[\hat{\phi}]$ för alla testfunktioner ϕ. Varför är detta inte möjligt och hur kommer man runt problemet? (4p)
b) Låt $V = \{f : f \in C([a,b])\}$. Förklara varför V med skalärprodukten $< f, g >= \int_a^b fg dx$ inte är ett Hilbertrum. (3p)

5. Låt Ω vara enhetsdisken i $\mathbb{R}^2$. Ge en variationsformulering till problemet

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u + (1+y^2)u = e^{-(x^2+y^2)} \text{ i } \Omega \\
&\frac{\partial u}{\partial n} = x^2 \text{ på } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Verifiera att din variationsformulering är korrekt genom att visa att en lösning u till variationsproblemet löser problemet ovan om $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Verifiera sedan villkoren i Lax-Milgrams sats för variationsproblemet. (8p)

6. Lös ekvationen

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, \quad (t \geq 0, x \geq 0), \\
&u_t(t,0) = 2u_x(t,0), \quad (t \geq 0), \\
&u(0,x) = f(x), \quad (x \geq 0), \\
&u_t(0,x) = g(x), \quad (x \geq 0),
\end{aligned}
$$

där $f, g \in C^2((0,\infty))$ och $f(x) = g(x) = 0$ då $0 < x < \epsilon$ för något $\epsilon > 0$. (6p)

7. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^3$ och låt $f \in C^1(\Omega)$ och antag att f är begränsad och har kompakt stöd i Ω. Låt

$$
w_f := -\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} f(y)\,dy.
$$

Visa att $w_f \in C^2(\Omega)$ och att $\Delta w_f = f$. (8p)

Betygsgränser: 20-29 p ger betyget 3; 30-39 p ger betyget 4; 40-50 p ger betyget 5.

Lycka till!/HA

Lösningar 2015-01-15

1) $u_x + y u_y = 0$

betrakta $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \log y = x + C \Leftrightarrow \log y - x = C$

Låt $\begin{cases} \eta = \log y - x \\ \xi = x \end{cases}$

$u_x = u_\eta \eta_x + u_\xi \xi_x = -u_\eta + u_\xi$

$u_y = \eta_y u_\eta + u_\xi \xi_y = u_\eta \cdot \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \quad u_x + y u_y = -u_\eta + u_\xi + y\left(u_\eta \cdot \frac{1}{y}\right) = u_\xi = 0$

Alltså $\quad u(\eta, \xi) = h(\eta)$.

$\Rightarrow u(x,y) = h(\log y - x)$

$u(0,y) = h(\log y) = y^3 \Rightarrow h(t) = e^{3t}$

Alltså $\quad u(x,y) = e^{3(\log y - x)} = y^3 \cdot e^{-3x}$.

2) Vi använder medelvärdessatsen:

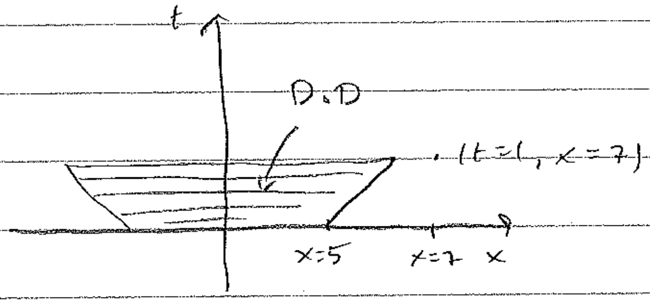
$$u(0,0,0) = \frac{1}{(\text{arean av } \partial D)} \int_{\partial D} u \, ds.$$

Alltså $\quad u(0,0,0) = \frac{1}{4\pi \cdot 25} \int_{\partial D} u \, ds = \begin{bmatrix} x = 5\sin\theta\cos\varphi \\ y = 5\sin\theta\sin\varphi \\ z = 5\cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{100\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 25\cos^2\theta \cdot 25\sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi \cdot 625}{100\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{25}{2}\left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{3}\right] = \frac{25}{3}.$$

2, b) Lösningen till vågekvationen har egenskapen att data vid $t=0$ endast påverkar lösningen i "domain of dependence".



Punkten $t=1$, $x=7$, $y=0$, $z=0$ ligger utanför DoD, alltså $u(1,7,0,0)=0$.

3, a) Vi har

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\,dx = \int_0^1 2u_t u\,dx = \int_0^1 2\underbrace{(u_t - u_{xx} - (x^2-1)u)}_{=0}\,u\,dx +$$

$$+ \int_0^1 2u_{xx}u + 2(x^2-1)u^2 = 2\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(u_x u)\,dx}_{=0 \text{ ty } u(t,0)=u(t,1)=0} -$$

$$- \underbrace{2\int_0^1 u_x^2\,dx}_{\leq 0} + \underbrace{2\int_0^1 (x^2-1)u^2\,dx}_{\leq 0 \text{ ty } 0\leq x\leq 1} \leq 0.$$

Alltså $\int_0^1 u^2(t,x)\,dx \leq \int_0^1 u^2(0,x)\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \left[x^2 - x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$.

b) Då $x^2-1 \leq 0$ för $x \in [0,1]$ gäller svaga maximumprincipen.

Då $u=0$ för $x=0$, $x=1$ antas max då $t=0$.

Alltså: Max av $\sqrt{x(1-x)} = \frac{1}{2}$.

4) a) Då $\hat{\phi}$ inte nödvändigtvis har kompakt stöd behöver $\hat{\phi}$ inte vara en testfunktion. Alltså är inte $u(\hat{\phi})$ alltid definierat då u verkar på testfunktioner. Man definierar istället Fouriertransformen av en tempererad distribution som är definierad på Schwartzklassen av funktioner.

b) Man kan konstruera en Cauchysekvens som inte konvergerar mot något element i V, dvs. V är inte fullständigt. Man kan t.ex. betrakta sekvensen

$$g_n(x) = \tanh(nx).$$

På föreläsningarna har vi visat att detta är en Cauchysekvens som inte har en kontinuerlig gränsfunktion.

5) Detta är i princip uppgift 2.5 i Johnson. För att verifiera att variationsformulering är korrekt följ metoden på sidan 41 i Johnson.

b) Detta är uppgift 2.1 i Colton i fallet $\alpha = 2$.