MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2021-10-09 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Lösningsförslag 031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.

Upp till 10 bonuspoäng från 2021 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper!

Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $P(f) = xf'(x) + 2f(1)/x$ och $\mathcal{E} = \{x^{-1}, \ln(x), 1, x\}$, $\mathcal{F} = \{x^{-1}, 1, x\}$, $U = \mathrm{Span}(\mathcal{E})$, $V = \mathrm{Span}(\mathcal{F})$.

(a) Visa att $P : C^1((0,2)) \to C((0,2))$ är en linjär avbildning. (2p)

(b) Bestäm matrisen A för avbildningen $P : U \to V$ i baserna $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$. (3p)

(c) Ange en bas för ortogonala komplementet till värderummet för matrisen A^T. (2p)

Lösning:

(a) För alla $f, g \in C^1((0,2))$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ får vi $P(\alpha f + \beta g)(x) = x(\alpha f'(x) + \beta g'(x)) + 2(\alpha f(1) + \beta g(1))/x = \alpha P(f)(x) + \beta P(g)(x)$, så avbildningen är linjär. För $f \in C^1((0,2))$ ser vi dessutom att $xf'(x) + 2f(1)/x$ blir kontinuerlig på $(0,2)$, så $P(f) \in C((0,2))$.

(b) Låt $\mathbf{e}_i$ och $\mathbf{f}_i$ beteckna baselementen i baserna $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$.

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{e}_1) &= x\frac{d}{dx}(x^{-1}) + 2(1)^{-1}/x = x^{-1} = \mathbf{f}_1 \\
P(\mathbf{e}_2) &= x\frac{d}{dx}(\ln(x)) + 2\ln(1)/x = 1 = \mathbf{f}_2 \\
P(\mathbf{e}_3) &= x\frac{d}{dx}(1) + 2/x = 2x^{-1} = 2\mathbf{f}_1 \\
P(\mathbf{e}_4) &= x\frac{d}{dx}(x) + 2/x = x + 2x^{-1} = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

(c) Satsen om de fyra fundamentala underrummen ger $\mathrm{V}(A^T)^\perp = \mathrm{N}(A)$. Matrisen är redan radreducerad, så vi kan sätta tredje variabeln som parameter. Vi får $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. **Svar:** $\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ utgör en bas för $\mathrm{V}(A^T)^\perp$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ och $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$.

(a) Bestäm egenvärdena för A och ange algebraiska multipliciteten för varje egenvärde. (2p)

(b) Visa att $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ är en skalärprodukt på $\mathbb{R}^3$. (2p)

(c) Bestäm en ON-bas med avseende på $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ för $\mathrm{V}(B)$. (3p)

(d) Bestäm ortogonalprojektionen med avseende på $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ av $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ på $\mathrm{V}(B)$. (2p)

Lösning:

(a) Karakteristiska ekvationen: $0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$ $(1-\lambda)((2-\lambda)^2-1) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$.
Så egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ med multiplicitet 2 och $\lambda_2 = 3$ med multiplicitet 1.

(b) $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$ är en 1×1 matris och därmed symmetrisk och A är symmetrisk, så $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_A = \mathbf{u}^T A\mathbf{v} = (\mathbf{u}^T A\mathbf{v})^T = \mathbf{v}^T A^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T A^T\mathbf{u} = \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_A$. Dvs $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ är symmetrisk. $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle_A = (a\mathbf{u}+b\mathbf{w})^T A\mathbf{v} = a\mathbf{u}^T A\mathbf{v} + b\mathbf{w}^T A\mathbf{v} = a\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_A + b\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle_A$, så den är linjär i första argumentet. $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_A = \mathbf{u}^T A\mathbf{u}$ är en positivt definit kvadratisk form på grund av att alla egenvärdena är positiva. Därför gäller $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_A \geq 0$ med likhet omm $\mathbf{u} = 0$. Så $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ är en skalärprodukt.

(c) Vi använder Gram-Schmidt. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1$. $\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle_A = \mathbf{u}_1^T A\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$ 9, så $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\langle \mathbf{b}_2,\mathbf{q}_1\rangle_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = -3$ så $\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{b}_2,\mathbf{q}_1\rangle_A\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 18$, så $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/(3\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}/3 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
Svar: $\{\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/(3\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}/3 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\}$.

(d) Projektionen ges av $\langle \mathbf{b},\mathbf{q}_1\rangle_A\mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{b},\mathbf{q}_2\rangle_A\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Betrakta begynnelsevärdesproblemet som ges av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -7x_1(t) & - & 4x_2(t) \\ x_2'(t) = & 6x_1(t) & + & 3x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = -1$.

(a) Bestäm en exakt lösning till begynnelsevärdesproblemet. (4p)

(b) Avgör ifall problemet är asymptotiskt stabilt. (1p)

(c) Vad blir resultatet efter k iterationer med Eulers framåtmetod med steglängd h. (2p)

(d) För vilka reella steglängder h är Eulers framåtmetod stabil. (2p)

Lösning:

(a) Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.
Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -4 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (1+\lambda)(3+\lambda)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$.
Egenvektorer till $\lambda_1 = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = -3$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & -4 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = TDT^{-1}$ med $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = -3y_2(t) \end{cases}$.

De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-3t} \end{cases}$.

c_1 och c_2 bestäms av $T\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1$.

Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Båda egenvärdena är negativa så problemet är asymptotiskt stabilt. Alla lösningar konvergerar mot $[0\ 0]^T$ då $t \to \infty$.

(c) Eulers framåtmetod ger $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + hA\mathbf{x}^{(k)} = (I + hA)\mathbf{x}^{(k)}$, där $\mathbf{x}^{(k)}$ är lösningen efter steg k. Efter k iterationer får vi $\mathbf{x}^{(k)} = (I+hA)^k\mathbf{x}^{(0)} = (TT^{-1}+hTDT^{-1})^k\mathbf{x}^{(0)} = T(I+hD)^kT^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$. Från (a) har vi att $T^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-h)^k & 0 \\ 0 & (1-3h)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-3h)^k \\ -(1-3h)^k \end{bmatrix}$$

(d) Vi ser att lösningen divergerar om $|1-h| > 1$ eller $|1-3h| > 1$, men annars håller sig lösningen ändlig. Mest begränsande är $|1-3h| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 1-3h \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -3h \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 3h \le 2$. **Svar:** $0 \le h \le 2/3$.

4. (a) Låt $f(x_1, x_2) = x_1^4 - \frac{1}{3}x_1^3 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + \frac{1}{24}$. Vi söker $\min f(\mathbf{x})$ då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Utför en iteration med Newtons metod för minimering med exakt linjesökning och startpunkt $\mathbf{x}^{(0)} = [1/2, 1/4]^T$. (4p)

(b) Man söker minimum x^* till en unimodal funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ med hjälp av Gyllene snitt metoden. Bestäm längden på det intervall x^* garanterat ligger i efter k iterationer och ange hur många funktionsberäkningar som krävts för att nå dit. (2p)

Lösning:

(a) Newtons metod for minimering innebär att vi söker en rot till $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ med hjälp av Newtons metod för rotsökning. Till detta behöver vi gradienten och Jacobianen av gradienten, dvs Hessianen.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1^2 + 4x_1^3 - 2x_2 \\ -2x_1 + 8x_2 \end{bmatrix}, \qquad H(\mathbf{x}) = J(\nabla f)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

I startpunkten $\mathbf{x}^{(0)} = [1/2, 1/4]^T$ har vi

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

För Newton iterationen löser vi $H(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(0)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1/4 \\ -2 & 8 & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/8 \end{bmatrix}.$$

Låt $g(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{s}^{(0)}) = 4\left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{8}\right)^2 + \frac{\alpha}{8} - \frac{3}{16}$. Sök minimum $0 = g'(\alpha) = \frac{\alpha-1}{8}$, så optimal steglängd är $\alpha = 1$. Det är också minimum ty $g''(\alpha) = \frac{1}{8} > 0$.

Svar: $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/8 \end{bmatrix}$.

(b) Efter varje iteration med Gyllene snitt metoden multipliceras intervall-längden med $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$ så efter k iterationer får vi intervall längd $I_k = \tau^k$. Varje iteration kräver en extra funktionsberäkning, men första iterationen kräver 2.
Svar: Intervall-längd τ^k och $k + 1$ funktionsberäkningar krävs.

5. (a) Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet för ett generellt vektorrum. Kom ihåg att ange när likhet gäller. (4p)

(b) Visa att Newtons metod för minimering konvergerar kvadratiskt om målfunktionen $f \in C^3(\mathbb{R})$ har ett minimum x^*, $f''(x^*) > 0$ och man startar så nära x^* att metoden konvergerar. Ange även den asymptotiska felkonstanten. (5p)

Lösning:

(a) Se sats 2.1 och dess bevis i Linjär algebra boken.

(b) Minimum i x^* och $f''(x^*) > 0$ ger $f'(x^*) = 0$. Taylorutveckling kring approximationen x_k ger

$$0 = f'(x^*) = f'(x_k) + f''(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f'''(\xi_k)(x^* - x_k)^2. \tag{1}$$

Newtons metod för minimering ger

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = f''(x_k)(x_k - x_{k+1}) - f'(x_k)$$

Adderar vi detta till (1) får vi

$$0 = f'(x^*) = f''(x_k)(x^* - x_{k+1}) + \frac{1}{2}f'''(\xi_k)(x^* - x_k)^2$$
$$\Rightarrow \quad |x_{k+1} - x^*| = \left|\frac{f'''(\xi_k)}{2f''(x_k)}\right| |x_k - x^*|^2$$

På grund av kontinuiteten och $f''(x^*) > 0$ blir $f''(x_k) > 0$ om x_k är tillräckligt nära x^*. Om $x_k \to x^*$ då $k \to \infty$ får vi även $\xi_k \to x^*$ och konvergensen blir kvadratisk med asymptotisk felkonstant

$$C = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{f'''(\xi_k)}{2f''(x_k)}\right| = \left|\frac{f'''(x^*)}{2f''(x^*)}\right|.$$

6. En 4×5 matris A har LU-faktorisering $PA = LU$ med $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Beskriv hur L ser ut inklusive storleken på elementen. (1p)

(b) Ange en bas för $\mathrm{N}(A)$. (2p)

(c) Vad är fördelen med att lösa ekvationssystem med LU-faktorisering istället för Gausselimination för stora system? (1p)

Lösning:

(a) L är en nedåt triangulär 4×4 matris, med ettor på diagonalen. Alla element är till beloppet mindre än 1.

(b) På grund av att både L pch P är inverterbara får vi $N(A) = N(U)$. Lösning av $U\mathbf{x} = 0$ ger basen $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$.

(c) Om man har en LU-faktorisering $PA = LU$ så kan man lösa systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genom en framåtsubstitution $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ följt av en bakåtsubstitution $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Detta innebär att för varje nytt högerled krävs $\mathcal{O}(n^2)$ flyttals operationer jämfört med $\mathcal{O}(n^3)$ som en Gauss-elimination kräver. LU-faktoriseringen i sig kräver dock lika många operationer som Gauss-eliminationen (utan högerled), så för bara ett högerled sparar man ingen tid. Har man många högerled kan man dock spara mycket tid.

7. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$.

t	1.5	1.9	2.0
f	0.4	0.4	0.2

Antag också att $f \in C^2([1.5, 2.0])$ och $|f''(t)| \leq 2$ för alla $t \in [1.5, 2.0]$.

(a) Använd Taylorutveckling för att visa att bakåt-differens för $f'(t)$ ger trunkeringsfel $\frac{-1}{2}hf''(\xi)$ där $t - h \leq \xi \leq t$. (2p)

(b) Approximera $f'(2.0)$ så noggrant som möjligt med hjälp av bakåt-differens och skatta både approximationsfelet och avrundningsfelet. Funktionsvärdena är korrekt avrundade till en decimal. (3p)

(c) Bestäm ett polynom $p(t)$ som interpolerar $f(t)$ i de givna punkterna. (2p)

(d) Varför kan man inte använda Simpsons regel för att approximera integralen $\int_{1.5}^{2.0} f(t)dt$ i den här uppgiften? (1p)

Lösning:

(a) Taylorutveckling ger $f(t-h) = f(t) - f'(t)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2$ för något $t - h \leq \xi \leq t$. Bakåt-differens ger då trunkeringsfelet

$$R_T = \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - f'(t) = \frac{f(t) - f(t) + f'(t)h - \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 - f'(t)h}{h} = \frac{-1}{2}f''(\xi)h.$$

(b) Trunkeringsfelet kan uppskattas med $|R_T| \leq \frac{h}{2}|f''(\xi)| \leq h$. Avrundning ger $|\delta f| \leq 0.05$. Detta ger avrundningsfel i differenskvoten $|R_f| \leq \dfrac{|\delta f(t)| + |\delta f(t-h)|}{h} \leq \frac{0.1}{h}$.
Vi har två möjliga val av h. Valet $h = 0.1$ ger totalt fel $|R_T| + |R_f| \leq 0.1 + 1 = 1.1$, men $h = 0.5$ ger totalt fel $|R_T| + |R_f| \leq 0.5 + 0.2 = 0.7$. Därför ska vi välja $h = 0.5$ och får då $f'(2.0) \approx \dfrac{f(2.0) - f(1.5)}{0.5} = \dfrac{-0.2}{0.5} = -0.4$.
Svar: $|f'(2.0) + 0.4| \leq 0.7$.

(c) Vi har 3 punkter så vi behöver ett andragradspolynom. Newtons form är $p(t) = c_0 + c_1(t - 1.5) + c_2(t - 1.5)(t - 1.9)$. Interpolationsvillkoren ger

$$\begin{aligned} 0.4 &= f(1.5) = p(1.5) = c_0 \\ 0.4 &= f(1.9) = p(1.9) = c_0 + c_1(1.9 - 1.5) \\ 0.2 &= f(2.0) = p(2.0) = c_0 + c_1(2.0 - 1.5) + c_2(2.0 - 1.5)(2.0 - 1.9) \end{aligned}$$

Detta ger $c_0 = 0.4$, $c_1 = 0$, $c_2 = -4$, så interpolationspolynomet blir
$p(t) = 0.4 - 4(t - 1.5)(t - 1.9) = -11 + 13.6t - 4t^2$.

(d) Simpsons regel kräver funktionsvärdet i mittpunkten på intervallet, men det värdet är inte givet i uppgiften.

8. En 6×3 matris A har en kompakt singulärvärdesfaktorisering $A = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ med

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-30} \end{bmatrix},$$

och låt $\mathbf{u}_k$ och $\mathbf{v}_k$ beteckna kolonn k i U_1 respektive V_1.

(a) Bestäm egenvärdena med multiplicitet för $A^T A$ och AA^T. (2p)

(b) Bestäm (det effektiva) konditionstalet $\kappa(A)$ med avseende på 2-normen. (1p)

(c) Bestäm det $\mathbf{x}$ som minimerar $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ med $\mathbf{b} = 2\mathbf{u}_2 + 2^{-20}\mathbf{u}_3$. Om det finns flera välj det $\mathbf{x}$ som har minst $\|\mathbf{x}\|$. (2p)

(d) Upprepa (c) uppgiften, men med trunkerad SVD istället. Varför kan detta vara bättre? Förklara med konditionstal och matrisnormer. (3p)

Lösning:

(a) $A^T A$ är en 3 matris med diagonalisering $A^T A = V_1 \Sigma_1^2 V_1^T$. Observera att V_1 är inverterbar. Egenvärdena blir de singulära värdena i kvadrat, dvs $\{2^8, 1, 2^{-60}\}$ med multiplicitet 1. $AA^T = U_1 \Sigma_1^2 U_1^T$ är en 6×6 matris. Observera att U_1 inte är inverterbar, så för en full diagonalisering behöver vi fylla ut med 3 kolonner till, nämligen en bas för nollrummet till A^T. Motsvarande egenvärden är 0. Så totalt har AA^T egenvärden $\{2^8, 1, 2^{-60}, 0\}$ där 0 har multiplicitet 3 och övriga multiplicitet 1.

(b) Konditionstalet ges av $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2^4}{2^{-30}} = 2^{34}$, så matrisen är illa konditionerad.

(c) Minstakvadratlösning med minst $\|\mathbf{x}\|$ ges av $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{v}_i \sigma_i^{-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{b}$. För matrisen A får vi därför $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_2 \sigma_2^{-1} \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 + 2^{-20} \mathbf{v}_3 \sigma_3^{-1} \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{v}_2 + 2^{10}\mathbf{v}_3$ på grund av att $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^3$ är en ON-mängd. Vi ser att trots att $2^{-20}\mathbf{u}_3$ termen är väldigt liten ger den ett stort bidrag till $\mathbf{x}$.

(d) Om vi trunkerar det lägsta singulära värdet får vi matrisen $A_2 = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2 \sigma_2 \mathbf{v}_2^T$ och minstakvadratlösning $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_2 \sigma_2^{-1} \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{v}_2$, så störningen $2^{-30}\mathbf{u}_3$ påverkar inte. Detta förklaras av att konditionstalet $\kappa(A_2) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{2^4}{1} = 2^4$ blir mycket bättre. Skillnaden mellan matriserna är liten ty $\|A - A_2\|_2 = \|\sigma_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T\|_2$ som ges av roten ur största egenvärdet till $(\sigma_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T)^T \sigma_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T = \sigma_3^2 \mathbf{v}_3 \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T = \sigma_3^2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T$. Det egenvärdet är σ_3^2 så $\|A - A_2\|_2 = \sigma_3 = 2^{-30}$.