MATEMATISKA VETENSKAPER | **Hjälpmedel: alla**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2021-08-26 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl | Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Tentamen | 031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2021 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $U = \mathrm{Span}\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t)\}$ och $P(f(t)) = f''(t) + \sin(t)f(0)$.

(a) Visa att $\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t)\}$ utgör en linjärt oberoende mängd. (2p)

(b) Visa att $P : U \to U$ är en linjär avbildning. (1p)

(c) Bestäm matrisen för avbildningen P i basen $\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t)\}$. (3p)

2. Betrakta systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = & -2x_1(t) & +x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & -2x_2(t) \end{cases}$.

(a) Lös systemet med begynnelsedata $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (5p)

(b) Avgör ifall systemet är asymptotiskt stabilt, dels genom generell teori, dels genom att undersöka lösningarna för generella begynnelsevärden. (2p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(a) Gör en kompakt QR-faktorisering av $A = Q_1R$ med hjälp av Gram-Schmidt metoden. (4p)

(b) Antag att vi fyller på med en matris Q_2 så att $Q = [Q_1\ Q_2]$ blir en ortogonalmatris. Beskriv en ON-bas för $\mathrm{N}(A^T)$ uttryckt i kolonnerna i Q. Motivera med lämplig teori. OBS Q_2 behöver inte beräknas. (2p)

(c) Beräkna minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med hjälp av resultatet i (a). (2p)

4. Anta att $f(x)$ är en kontinuerlig konvex funktion med följande kända funktionsvärden

x	0	3/2	2	3	4
f	2	3/4	1	2	4

(a) Bestäm det andragrads-polynom som interpolerar f i punkterna 0, 2 och 4. (2p)

(b) Vi vill nu minimera f på intervallet $[0, 4]$ med hjälp av polynom-approximationsmetoden, med andragrads-polynom.
Börja med punkterna och polynomet i (a) för att bestämma de tre punkterna för nästa iteration. Motivera! (3p)

(c) Om man vid minimering av en konvex funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ använder brantastelutnings metoden (Steepest Descent) med exakt (eller noggrann) linjesökning så uppträder ganska ofta ett problem som konjungerade gradientmetoden är designad att avhjälpa.
Beskriv problemet och kortfattat varför konjungerade gradientmetoden hjälper för kvadratiska konvexa funktioner. (Bevis krävs ej.) (2p)

5. (a) Antag att A_0 är en kvadratisk matris och man beräknar A_k iterativt med full QR faktorisering enligt

$$\begin{aligned} Q_k R_k &= A_{k-1} - \sigma_k I \\ A_k &= R_k Q_k + \sigma_k I, \end{aligned}$$

för $k = 1, 2, \dots$ och σ_k är tal som beräknas på något sätt.
Visa att A_k och A_0 har samma egenvärden. (4p)

(b) Utgående från Cauchy-Schwarz olikhet visa olikheten

$$\big| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \big| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

OBS V antas vara ett generellt vektorrum med skalärprodukt. (4p)

6. För en symmetrisk positivt (semi-) definit matris A låter vi $A^{1/2} = B$ beteckna en symmetrisk positivt (semi-) definit lösning till $B^2 = A$. Låt $A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$.

(a) Ortogonalt diagonalisera A. (4p)

(b) Avgör ifall A är positivt definit eller semi-definit. (1p)

(c) Beräkna $A^{1/2}$. (2p)

(d) Låt $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ och skriv $B^2 = A$ på formen $f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi vill nu beräkna $A^{1/2}$ med Newtons metod. Utför en iteration med $B = 3I$ som initial-gissning. (4p)

7. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, där n är ett stort positivt heltal.

(a) Bestäm en LU-faktorisering utan pivotering av matrisen A. (1p)

(b) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen A. (1p)

(c) Bestäm konditionstalet $\kappa_2(L)$ för L matriserna från (a) och (b) uppgifterna och förklara varför pivotering är viktigt. Använd vanlig 2-norm.
Tips: $\| \begin{bmatrix} a & 0 \\ b\sqrt{2} & a \end{bmatrix} \|_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2 + b^4}} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$. (3p)

8. Studera begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) = g(t)(1 + y(t)^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ där den kontinuerliga funktionen $g(t)$ har följande kända funktionsvärden

t	0	1/2	1
g	1	3/4	$(3\pi/2 - 4)$

(a) Approximera $y(1)$ med Eulers framåt metod med steglängd $h = 1/2$. (3p)

(b) Utför variabelbytet $z(t) = \arctan(y(t))$ och skriv upp lösningen $z(t)$ på integralform. (2p)

(c) Approximera $y(1)$ genom att approximera integralen i (b) med Simpsons regel. (3p)

MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: alla**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2021-08-26 kl. 08.30–12.30
Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag 031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2021 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $U = \text{Span}\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t)\}$ och $P(f(t)) = f''(t) + \sin(t)f(0)$.

(a) Visa att $\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t)\}$ utgör en linjärt oberoende mängd. (2p)

(b) Visa att $P : U \to U$ är en linjär avbildning. (1p)

(c) Bestäm matrisen för avbildningen P i basen $\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t)\}$. (3p)

Lösning:

(a) De är linjärt oberoende om $c_1 \cos(t)+c_2 \sin(t)+c_3 \cos(2t) = 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$ endast har trivial lösning. Vi tittar på en delmängd av villkoren, $c_1 \cos(t)+c_2 \sin(t)+c_3 \cos(2t) = 0$ för $t \in \{0, \pi/2, \pi\}$. Detta ger ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lägger vi till ekvationer för alla andra t så får vi fortfarande bara den triviala lösningen, så funktionerna är linjärt oberoende.

(b) För godtyckliga $a, b \in \mathbb{R}$ och $f, g \in U$ har vi $P(af(t) + bg(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(af(t) + bg(t)) + \sin(t)(af(0) + bg(0)) = af''(t) + bg''(t) + a\sin(t)f(0) + b\sin(t)g(0) = aP(f(t)) + bP(g(t))$, så avbildningen är linjär.

(c) Enligt (a) så utgör $\mathcal{E} = \{e_1 = \cos(t), e_2 = \sin(t), e_3 = \cos(2t)\}$ en bas för U. $P(e_1) = -\cos(t) + \sin(t) = -e_1 + e_2$, $P(e_2) = -\sin(t) = -e_2$, $P(e_3) = -4\cos(2t) + \sin(t) = -4e_3 + e_2$. Matrisen för P i basen $\mathcal{E}$ är

$$A = \Big[[P(e_1)]_{\mathcal{E}}\ [P(e_2)]_{\mathcal{E}}\ [P(e_3)]_{\mathcal{E}}\Big] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Betrakta systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = & -2x_1(t) & +x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & -2x_2(t) \end{cases}$.

(a) Lös systemet med begynnelsedata $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (5p)

(b) Avgör ifall systemet är asymptotiskt stabilt, dels genom generell teori, dels genom att undersöka lösningarna för generella begynnelsevärden. (2p)

Lösning:

(a) Systemet kan formuleras som $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Vi söker egenvärden till A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - i^2 = (-2-i-\lambda)(-2+i-\lambda).$$

Sök egenvektorer till de olika egenvärdena:

$\lambda_1 = -2-i$: $\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = -2+i$: $\left[\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Matrisen är inte symmetrisk så vi kan inte göra en ortogonal diagonalisering.

Vi får $A = TDT^{-1}$ med $T = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -2-i & 0 \\ 0 & -2+i \end{bmatrix}$. Med $\mathbf{y} = T^{-1}\mathbf{x}$ får vi det diagonala systemet $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$, som har allmänna lösningarna $\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{(-2-i)t} \\ y_2(t) = c_2 e^{(-2+i)t} \end{cases}$.

Observera att c_1 och c_2 är komplexa. Vi ser att $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, så $T\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0)$ ger systemet $\left[\begin{array}{cc|c} i & -i & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2i \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2i \\ 0 & 2 & 2i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i \end{array}\right] \Rightarrow$ $c_1 = -i, c_2 = i$. Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ie^{(-2-i)t} \\ ie^{(-2+i)t} \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} e^{-it} + e^{it} \\ -ie^{-it} + ie^{it} \end{bmatrix} = 2e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}.$$

(b) Alla egenvärdena har negativ realdel så systemet är asymptotiskt stabilt. De allmänna lösningarna $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = e^{-2t} T \begin{bmatrix} c_1 e^{-it} \\ c_2 e^{it} \end{bmatrix} \to 0$ då $t \to \infty$, på grund av att e^{-it} och e^{-it} är begränsade och $e^{-2t} \to 0$. Så alla lösningar går mot 0 och närmar sig därför varandra då $t \to \infty$.

3. Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(a) Gör en kompakt QR-faktorisering av $A = Q_1 R$ med hjälp av Gram-Schmidt metoden. (4p)

(b) Antag att vi fyller på med en matris Q_2 så att $Q = [Q_1\ Q_2]$ blir en ortogonalmatris. Beskriv en ON-bas för $\mathrm{N}(A^T)$ uttryckt i kolonnerna i Q. Motivera med lämplig teori. OBS Q_2 behöver inte beräknas. (2p)

(c) Beräkna minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med hjälp av resultatet i (a). (2p)

Lösning:

(a) Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \|\mathbf{u}_1\| = 4, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \underbrace{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}_{1}\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{u}_2\| = 1, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - \underbrace{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_3)}_{-1}\mathbf{q}_1 - \underbrace{(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a}_3)}_{1}\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{u}_3\| = 3, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ -1/2 & -1/2 & -2/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Med $r_{jj} = \|u_j\|$ och $r_{ij} = (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ för $i \leq j$ får vi $A = Q_1 R$ med $R = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Satsen om de fyra fundamentala underrummen ger $\mathrm{N}(A^T) = \mathrm{V}(A)^\perp$. Låt $Q_2 = [\mathbf{q}_4\ \mathbf{q}_5]$ så att $Q = [Q_1\ Q_2]$ blir en ortogonalmatris. På grund av att R är inverterbar får vi $\mathrm{V}(A) = \mathrm{V}(Q_1 R) = \mathrm{V}(Q_1)$. Detta innebär att $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ är en ON-bas för $\mathrm{V}(A)$ och vi får att $\{\mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5\}$ utgör en ON-bas för $\mathrm{V}(A)^\perp = \mathrm{N}(A^T)$.

(c) Minstakvadratlösningen ges av lösningen till $R\mathbf{x} = Q_1^T\mathbf{b}$, dvs $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$ som har lösning $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Anta att $f(x)$ är en kontinuerlig konvex funktion med följande kända funktionsvärden

x	0	3/2	2	3	4
f	2	3/4	1	2	4

(a) Bestäm det andragrads-polynom som interpolerar f i punkterna 0, 2 och 4. (2p)

(b) Vi vill nu minimera f på intervallet $[0, 4]$ med hjälp av polynom-approximationsmetoden, med andragrads-polynom.
Börja med punkterna och polynomet i (a) för att bestämma de tre punkterna för nästa iteration. Motivera! (3p)

(c) Om man vid minimering av en konvex funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ använder brantastelutnings metoden (Steepest Descent) med exakt (eller noggrann) linjesökning så uppträder ganska ofta ett problem som konjungerade gradientmetoden är designad att avhjälpa.
Beskriv problemet och kortfattat varför konjungerade gradientmetoden hjälper för kvadratiska konvexa funktioner. (Bevis krävs ej.) (2p)

Lösning:

(a) Newtons ansats ger $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-2)$. Interpolationsvillkoren ger

$$\begin{aligned} 2 &= f(0) = c_0, \\ 1 &= f(2) = c_0 + 2c_1, \\ 4 &= f(4) = c_0 + 4c_1 + 8c_2. \end{aligned}$$

Löser vi systemet får vi $c_0 = 2$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/2$.
Svar: $p(x) = 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2)$.

(b) På grund av att $f(2)$ är lägre än ändpunkterna och funktionen är kontinuerlig och konvex så har funktionen minimum någon stans på intervallet. Vi vill först minimera $p(x) = 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2) = 2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Sök stationär punkt $0 = p'(x) = x - 3/2$ och $p''(x) = 1$ ger att $x = 3/2$ är minimum för $p(x)$. Då $f(3/2) < f(2)$ så kan vi dra slutsatsen att minpunkten x^* ligger i intervallet $[0,2]$. Ty om $x^* \in]2,4]$ skulle $f(x^*) < f(3/2)$, men konvexiteten säger då att grafen vid $x = 2$ måste ligga under linjen mellan punkterna $(3/2, f(3/2))$ och $(x^*, f(x^*))$. Detta motsäger $f(3/2) < f(2)$, så $x^* \in [0,2]$. För nästa iteration får vi alltså punkterna $\{0, 3/2, 2\}$.

(c) Brantaste lutnings metoden kan ge väldigt många iterationer med korta sicksack steg. Konjungerade gradientmetoden använder en väl vald linjärkombination av nuvarande brantaste lutning och sökriktningen från föregående iteration. Sökriktningarna blir ortogonala med avseende på den inre produkten $\langle s_i, s_j \rangle = s_i^T H s_j$. För kvadratiska funktioner är Hessianen konstant och på grund av konvexiteten är den positivt definit. Därför är $\langle s_i, s_j \rangle = s_i^T H s_j$ en inre produkt. I $\mathbb{R}^n$ kan vi maximalt ha n ortogonala vektorer, så maximalt n iterationer krävs.

5. (a) Antag att A_0 är en kvadratisk matris och man beräknar A_k iterativt med full QR faktorisering enligt

$$\begin{aligned} Q_k R_k &= A_{k-1} - \sigma_k I \\ A_k &= R_k Q_k + \sigma_k I, \end{aligned}$$

för $k = 1, 2, \ldots$ och σ_k är tal som beräknas på något sätt.
Visa att A_k och A_0 har samma egenvärden. (4p)

(b) Utgående från Cauchy-Schwarz olikhet visa olikheten

$$\big| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \big| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \qquad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

OBS V antas vara ett generellt vektorrum med skalärprodukt. (4p)

Lösning:

(a) Från $Q_k^T = Q_k^{-1}$ och ekvationerna får vi $Q_k A_k Q_k^T = Q_k R_k Q_k Q_k^T + \sigma_k Q_k Q_k^T = Q_k R_k + \sigma_k I = A_{k-1} - \sigma_k I + \sigma_k I = A_{k-1}$. Detta innebär att A_k och A_{k-1} är similära för alla k. Det innebär också att A_k och A_0 är similära. $QA_kQ^{-1} = A_0$, med $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$. Q är en ortogonalmatris så $\det(Q) = 1$. A_0 och A_k har samma karakteristiska polynom $\det(A_0 - \lambda I) = \det(QA_kQ^T - \lambda I) = \det(Q(A_k - \lambda I)Q^T) = \det(Q)\det(A_k - \lambda I)\det(Q) = \det(A_k - \lambda I)$. Därför har A_k och A_0 har samma egenvärden.

(b) Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vara godtyckliga. $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$. Roten av ytter-leden ger $\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Byter vi plats på $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i argumentet får vi även $-\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Om $\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ använder vi den första varianten, annars den andra. Vi kan därför dra slutsatsen $\big| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \big| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

6. För en symmetrisk positivt (semi-) definit matris A låter vi $A^{1/2} = B$ beteckna en symmetrisk positivt (semi-) definit lösning till $B^2 = A$. Låt $A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$.

(a) Ortogonalt diagonalisera A. (4p)

(b) Avgör ifall A är positivt definit eller semi-definit. (1p)

(c) Beräkna $A^{1/2}$. (2p)

(d) Låt $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ och skriv $B^2 = A$ på formen $f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi vill nu beräkna $A^{1/2}$ med Newtons metod. Utför en iteration med $B = 3I$ som initial-gissning. (4p)

Lösning:

(a) Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25)$, så egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$. Sök egenvektorer till de olika egenvärdena:
$\lambda_1 = 0$: $\left[\begin{array}{cc|c} 16 & -12 & 0 \\ -12 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, så normering ger $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$.
$\lambda_2 = 25$: $\left[\begin{array}{cc|c} -9 & -12 & 0 \\ -12 & -16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, så normering ger $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$.
Vi får att $A = TDT^T$, med $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$, $T = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) A har egenvärde 0 och övriga egenvärden är positiva, så A är positivt semi-definit.

(c) $B = TD^{1/2}T^T$ är symmetrisk med egenvärden 0 och $\sqrt{25} = 5$, så den är positivt semi-definit. Vi har också $B^2 = TD^{1/2}T^TTD^{1/2}T^T = TD^{1/2}D^{1/2}T^T = TDT^T = A$. I det här fallet blir $D^{1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}D$, så $A^{1/2} = B = \frac{1}{5}TDT^T = \frac{1}{5}A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$.

(d) $B^2 - A = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 16 & x_1x_2 + x_2x_3 + 12 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + 12 & x_2^2 + x_3^2 - 9 \end{bmatrix} = 0$. På grund av symmetrin, får vi bara 3 ekvationer och $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 16 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + 12 \\ x_2^2 + x_3^2 - 9 \end{bmatrix}$, med $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Jacobianen blir $J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ x_2 & x_1 + x_3 & x_2 \\ 0 & 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}$. Initial-gissningen motsvarar $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. $J(\mathbf{x}^{(0)}) = 6I$, så $J(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} = \frac{1}{6}I$. Efter en iteration får vi $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - J(\mathbf{x}^{(0)})^{-1}f(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^{(0)} - \frac{1}{6}f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 25/6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

7. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, där n är ett stort positivt heltal.

(a) Bestäm en LU-faktorisering utan pivotering av matrisen A. (1p)

(b) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen A. (1p)

(c) Bestäm konditionstalet $\kappa_2(L)$ för L matriserna från (a) och (b) uppgifterna och förklara varför pivotering är viktigt. Använd vanlig 2-norm.
Tips: $\| \begin{bmatrix} a & 0 \\ b\sqrt{2} & a \end{bmatrix} \|_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2 + b^4}} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$. (3p)

Lösning:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{②-2^n①}{\sim} \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1 \\ 0 & 2-2^n \end{bmatrix}$$

Svar: $A = L_a U_a$ med $L_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & 1 \end{bmatrix}$, $U_a = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1 \\ 0 & 2-2^n \end{bmatrix}$.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{①\leftrightarrow②}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2^{-n} & 1 \end{bmatrix} \underset{②-2^{-n}①}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1-2^{1-n} \end{bmatrix}$$

Svar: $PA = L_b U_b$ med $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^{-n} & 1 \end{bmatrix}$, $U_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1-2^{1-n} \end{bmatrix}$.

(c) Konditionstalet med avseende på 2-normen är $\kappa_2(L) = \|L\|_2\|L^{-1}\|_2$. $L_a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2^n & 1 \end{bmatrix}$ och $L_b^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2^{-n} & 1 \end{bmatrix}$ så vi får

$$\begin{aligned} \kappa_2(L_a) &= 1 + 2^{2n-1} + \sqrt{2^{2n} + 2^{4n-2}} = 2^{2n}\left(\tfrac{1}{2} + 2^{-2n} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2^{-2n}}\right) \approx 2^{2n}, \\ \kappa_2(L_b) &= 1 + 2^{-2n-1} + \sqrt{2^{-2n} + 2^{-4n-2}} \approx 1. \end{aligned}$$

För stora n blir konditionstalet $\kappa_2(L_a)$ väldigt stort. Vid lösning av $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ har vi feluppskattningen

$$\frac{\|\delta\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \le \kappa_2(L)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2},$$

detta ger försumbar felförstärkning för L_b men mycket stor felförstärkning för L_a. För att undvika detta är pivotering viktigt.

8. Studera begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) = g(t)(1+y(t)^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ där den kontinuerliga funktionen $g(t)$ har följande kända funktionsvärden

t	0	1/2	1
g	1	3/4	$(3\pi/2-4)$

(a) Approximera $y(1)$ med Eulers framåt metod med steglängd $h = 1/2$. (3p)

(b) Utför variabelbytet $z(t) = \arctan(y(t))$ och skriv upp lösningen $z(t)$ på integralform. (2p)

(c) Approximera $y(1)$ genom att approximera integralen i (b) med Simpsons regel. (3p)

Lösning:

(a) Eulers framåtmetod ger $y_{k+1} = y_k + hg(t_k)(1+y_k^2)$. $y_0 = 0$ och $t_k = kh = k/2$ ger första iterationen $y_1 = g(0)/2 = 1/2$. Andra iterationen ger $y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(1+y_1^2)g(\frac{1}{2}) = 31/32$.
Svar: $y(1) \approx y_2 = 31/32$.

(b) $z(t) = \arctan(y(t))$ ger $z'(t) = (1+y(t)^2)^{-1}y'(t) = (1+y(t)^2)^{-1}g(t)(1+y(t)^2) = g(t)$, så $z(t) = z(0) + \int_0^t g(x)dx$, men $z(0) = \arctan(y(0)) = 0$ så $z(t) = \int_0^t g(x)dx$.

(c) $z(1) = \int_0^1 g(t)dt \approx \frac{1-0}{6}(g(0) + 4g(1/2) + g(1)) = \frac{1}{6}(1 + 3 + \frac{3\pi}{2} - 4) = \pi/4$. Detta ger $y(1) = \tan(z(1)) \approx \tan(\pi/4) = 1$.
Svar: $y(1) \approx 1$.