# TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2021 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta utan hjälpmedel förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1.** Antag att $A = QR$ och $A^T = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ med $Q = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3]$ en $3 \times 3$ ortogonalmatris, $\widetilde{Q} = [\tilde{\mathbf{q}}_1\ \ldots\ \tilde{\mathbf{q}}_5]$ en $5 \times 5$ ortogonalmatris och

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2/3 & 1/3 & -4 \\ 0 & 2 & -2/3 & 8/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & -4/3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm dimensionerna för rummen $V(A)$, $V(A^T)$, $N(A)$ och $N(A^T)$. (2p)

(b) Bestäm ON-baser för de rummen i (a) uppgiften som har positiv dimension.
Uttryck dina svar i kolonnerna $\mathbf{q}_i$ och $\tilde{\mathbf{q}}_i$ och motivera dina svar. (3p)

(c) Bestäm minstakvadratlösningen till $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $\mathbf{b} = -4\tilde{\mathbf{q}}_2 + 3\tilde{\mathbf{q}}_3 + 2\tilde{\mathbf{q}}_4$ och ange normen av residualen. (3p)

**2.** Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden till $A$ och baser för motsvarande egenrum. (4p)

(b) Använd resultatet i (a)-uppgiften för att beräkna $A^k$ för $k \in \mathbb{Z}$. Det är OK att svara med en produkt av tre matriser. Motivera varför även negativa $k$ fungerar. (3p)

(c) Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som maximerar $Q(\mathbf{u}) = \|A\mathbf{u}\|^2$ under förutsättningen $\|\mathbf{u}\| = 1$.
(Tips: Skriv $Q(\mathbf{u})$ som en kvadratisk form.) (3p)

(d) Beräkna konditionstalet $\kappa(A)$. (2p)

**3.** Låt $V$ vara vektorrummet av reella kontinuerliga funktioner $f(t)$ på intervallet $[0, 1]$ sådana att $\int_0^1 f(t)^2 \ln(t)dt$ är ändlig. Låt

$$\langle f(t), g(t)\rangle = -\int_0^1 f(t)g(t)\ln(t)dt$$

och låt $U$ vara det underrum av $V$ som spänns upp av $\{1, t\}$.

(a) Visa att $\langle f(t), g(t)\rangle$ är en skalärprodukt på $V$. (3p)

(b) Bestäm en ON-bas för underrummet $U$.
Du får vid behov använda att $\displaystyle\int_0^1 t^a \ln(t)dt = \frac{-1}{(a+1)^2}$ för $a > -1$. (3p)

(c) Bestäm funktionen $p(t) \in U$ som minimerar $\langle p(t) - t^2, p(t) - t^2\rangle$. (2p)

4. (a) Visa identiteten

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

för alla vektorer **u** och **v** i ett linjärt rum med norm som kommer från en skalärprodukt. (3p)

(b) Antag att $A$ är en $n \times n$ matris som uppfyller $A^2 - A - 2I = 0$. Ange alla egenvärden som $A$ skulle kunna ha. (3p)

(c) Vad är fördelen med trunkerad SVD jämfört med SVD. (1p)

5. Antag att $f$ är en funktion som uppfyller $|f^{(k)}(x)| \le M_k$ för alla $x$ och alla $0 \le k \le 4$. Låt

$$F(x,h) = \frac{4f(x+h) - 3f(x) - f(x-2h)}{6h}.$$

(a) Bestäm en övre gräns för beloppet av trunkeringsfelet till differensapproximationen $f'(x) \approx F(x,h)$. Den övre gränsen får bara bero på ett lämpligt $M_k$ och $h$. (Tips: Restterm på Lagrange-form.) (3p)

(b) Antag att man vid funktionsberäkningarna $f(x)$ har ett relativt fel på $10^{-9}$. Bestäm bästa möjliga steglängden $h$ så att uppskattningarna av totala felet blir så litet som möjligt. Formulera ditt svar i termer av lämpliga $M_k$. (3p)

6. Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_2^2 - 1/2 \\ x_1 - x_2 + 1/2 \end{bmatrix}$ och $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x})\|^2$.

(a) Studera ekvationen $f(\mathbf{x}) = 0$. Gör två iterationer med modifierad Newtons metod (dvs använd Jacobianen i startpunkten för alla iterationer) med start i punkten $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)

(b) Studera minimeringsproblemet $\min g(\mathbf{x})$ då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Man önskar använda brantaste lutning metoden (steepest descent) med start i punkten $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna sökriktningen för första iterationen, men gör ingen linjesökning. (2p)

7. Antag att man vill lösa en ODE $y'(t) = f(t, y(t))$ numeriskt med approximationsmetoden som ges av

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \qquad k_1 = f(t_k, y_k) \qquad k_2 = f(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hk_1).$$

(a) Applicera metoden på problemet $y'(t) = \lambda y(t)$ för att bestämma metodens approximationsordning. (4p)

(b) Ange maximal steglängd $h$ som ger en stabil metod för problemet $y'(t) = -y(t)$. (2p)

8. Studera $f(t) = \dfrac{4}{4+t^2}$.

(a) Bestäm ett polynom $p(t)$ som interpolerar $f(t)$ i de 5 punkterna $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. (3p)

(b) Beräkna $\int_{-2}^{2} f(t)dt$ på tre sätt:

i. Integrera polynomet från (a),

ii. Använd Simpsons formel med funktionsvärden i punkterna $\{0, \pm 1, \pm 2\}$

iii. Beräkna integralen analytiskt.

Gav metod i. eller ii. bäst resultat? (4p)

(c) Kan man förvänta sig bättre resultat om man använder ett polynom som interpolerar $f(x)$ i fler punkter? Varför/varför inte? (1p)

**MATEMATISKA VETENSKAPER**
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag

**Hjälpmedel: alla**
Datum: 2021-05-31 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

## TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2021 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta utan hjälpmedel förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1.** Antag att $A = QR$ och $A^T = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ med $Q = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3]$ en $3 \times 3$ ortogonalmatris, $\widetilde{Q} = [\tilde{\mathbf{q}}_1\ \dots\ \tilde{\mathbf{q}}_5]$ en $5 \times 5$ ortogonalmatris och

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2/3 & 1/3 & -4 \\ 0 & 2 & -2/3 & 8/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & -4/3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm dimensionerna för rummen $V(A)$, $V(A^T)$, $N(A)$ och $N(A^T)$. (2p)

(b) Bestäm ON-baser för de rummen i (a) uppgiften som har positiv dimension. Uttryck dina svar i kolonnerna $\mathbf{q}_i$ och $\tilde{\mathbf{q}}_i$ och motivera dina svar. (3p)

(c) Bestäm minstakvadratlösningen till $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $\mathbf{b} = -4\tilde{\mathbf{q}}_2 + 3\tilde{\mathbf{q}}_3 + 2\tilde{\mathbf{q}}_4$ och ange normen av residualen. (3p)

**Lösning**:

(a) $R$ har rang 3 och $Q$ är inverterbar, så $\dim(V(A)) = 3$. $\widetilde{R}$ har rang 3 och $\widetilde{Q}$ är inverterbar, så $\dim(V(A^T)) = 3$. Detta stämmer också med rangsatsen. Dimensionssatsen ger $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$ och $\dim(N(A^T)) = 3 - 3 = 0$.

(b) Formen på $R$ ger att $V(A)$ spänns upp av kolonnerna i $Q$ som är linjärt oberoende, så $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ utgör en ON-bas för $V(A)$. Formen på $\widetilde{R}$ ger att $V(A^T)$ spänns upp de tre första kolonnerna i $\widetilde{Q}$ som är linjärt oberoende, så $\{\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\mathbf{q}}_3\}$ utgör en ON-bas för $V(A^T)$. Satsen om de fyra fundamentala underrummen ger att $N(A) = V(A^T)^\perp$. Samtliga kolonner i $\widetilde{Q}$ utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^5$ och de tre första utgör en bas för $V(A^T)$ så $\{\tilde{\mathbf{q}}_4, \tilde{\mathbf{q}}_5\}$ utgör en bas för $V(A^T)^\perp = N(A)$.

(c) Minstakvadratlösningen ges av $\widetilde{R}_1\mathbf{x} = \widetilde{Q}_1^T\mathbf{b}$ där $\widetilde{R}_1$ ges av de tre första raderna i $\widetilde{R}$ och $\widetilde{Q}_1$ ges av de tre första kolonnerna i $\widetilde{Q}$. Kolonnerna i $\widetilde{Q}$ är ortonormala, så vi får $\tilde{\mathbf{q}}_1^T\mathbf{b} = 0$, $\tilde{\mathbf{q}}_2^T\mathbf{b} = -4$ och $\tilde{\mathbf{q}}_3^T\mathbf{b} = 3$. Minstakvadratlösningen ges därför av

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt $\widetilde{Q}_2 = [\tilde{\mathbf{q}}_4, \tilde{\mathbf{q}}_5]$. Normen av residualen ges av $\|r\| = \|\widetilde{Q}_2^T\mathbf{b}\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 2$.

**2.** Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden till $A$ och baser för motsvarande egenrum. (4p)

(b) Använd resultatet i (a)-uppgiften för att beräkna $A^k$ för $k \in \mathbb{Z}$. Det är OK att svara med en produkt av tre matriser. Motivera varför även negativa $k$ fungerar. (3p)

(c) Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som maximerar $Q(\mathbf{u}) = \|A\mathbf{u}\|^2$ under förutsättningen $\|\mathbf{u}\| = 1$. (Tips: Skriv $Q(\mathbf{u})$ som en kvadratisk form.) (3p)

(d) Beräkna konditionstalet $\kappa(A)$. (2p)

**Lösning**:

(a) Vi söker egenvärden till $A$:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1/2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1/2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1/2-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = (1/2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+4),$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$. Sök egenvektorer till de olika egenvärdena:

$$\lambda_1 = 1/2: \left[\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -7/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E(\lambda_1) = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1\}.$$

$$\lambda_2 = 1: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E(\lambda_2) = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_2\}.$$

$$\lambda_3 = -4: \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, E(\lambda_3) = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_3\}.$$

(b) Matrisen är symmetrisk och alla egenvärden har multiplicitet ett, så $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är automatiskt ortogonala. Normering ger en ortogonalmatris $T = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Vi får $A = TDT^T$ med $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

$$A^k = TDT^T TDT^T \cdots TDT^T = TDD\ldots DT^T = TD^kT^T$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4+(-4)^k & 0 & 2-(-4)^k \\ 0 & 5\cdot 2^{-k} & 0 \\ 2-2(-4)^k & 0 & 1+2(-4)^k \end{bmatrix}$$

Negativa $k$ fungerar pga $TD^{-1}T^TA = TD^{-1}T^TTDT^T = TD^{-1}DT^T = TT^T = I$ så $A^{-1} = TD^{-1}T^T$.

(c) $Q(\mathbf{u}) = \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u}\rangle = \mathbf{u}^TA^TA\mathbf{u} = \mathbf{u}^TA^2\mathbf{u} = \mathbf{u}^TTD^2T^T\mathbf{u}$. Låt $\mathbf{w} = T^T\mathbf{u}$. Då blir $\|\mathbf{w}\| = \|T^T\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| = 1$ på grund av att $T^T$ är en ortogonalmatris. $Q(\mathbf{u}) = 2^{-2}\mathrm{w}_1^2 + \mathrm{w}_2^2 + (-4)^2\mathrm{w}_3^2 \leq 16$ med likhet för $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vilket motsvarar $\mathbf{u} = T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(d) Analysen i c) uppgiften ger $\|A\| = \sqrt{\lambda_3^2} = |\lambda_3| = 4$, dvs roten av största egenvärdet för $A^2$. På samma sätt fås $\|A^{-1}\| = \sqrt{\lambda_1^{-2}} = \frac{1}{|\lambda_1|} = 2$. Konditionstalet är $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\| = 2 \cdot 4 = 8$.

**3**. Låt $V$ vara vektorrummet av reella kontinuerliga funktioner $f(t)$ på intervallet $[0,1]$ sådana att $\int_0^1 f(t)^2 \ln(t)dt$ är ändlig. Låt

$$\langle f(t), g(t)\rangle = -\int_0^1 f(t)g(t)\ln(t)dt$$

och låt $U$ vara det underrum av $V$ som spänns upp av $\{1, t\}$.

(a) Visa att $\langle f(t), g(t)\rangle$ är en skalärprodukt på $V$. (3p)

(b) Bestäm en ON-bas för underrummet $U$.
Du får vid behov använda att $\displaystyle\int_0^1 t^a \ln(t)dt = \frac{-1}{(a+1)^2}$ för $a > -1$. (3p)

(c) Bestäm funktionen $p(t) \in U$ som minimerar $\langle p(t) - t^2, p(t) - t^2\rangle$. (2p)

**Lösning**:

(a) Den är symmetrisk: $\langle f(t), g(t)\rangle = -\int_0^1 f(t)g(t)\ln(t)dt = \langle g(t), f(t)\rangle$, linjär i första argumentet: $\langle af(t)+bh(t), g(t)\rangle = -\int_0^1 (af(t)+bh(t))g(t)\ln(t)dt = -a\int_0^1 f(t)g(t)\ln(t)dt - b\int_0^1 h(t)g(t)\ln(t)dt = a\langle f(t), g(t)\rangle + b\langle h(t), g(t)\rangle$.
Vi har även $\langle f(t), f(t)\rangle = -\int_0^1 f(t)^2\ln(t)dt \geq 0$ på grund av att $-\ln(t) \geq 0$ på intervallet. På grund av kontinuitet får vi även att likhet endast kan gälla om $p(t) = 0$ på hela intervallet. Utan kontinuiteten hade $f(t)$ kunnat vara nollskild på t.ex. enstaka punkter. Vi drar slutsatsen att det är en skalärprodukt.

(b) Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på $p_1 = 1, p_2 = t$ ger

$$\begin{aligned}
&u_1 = p_1 = 1, \langle u_1, u_1\rangle = \langle 1, 1\rangle = 1 \Rightarrow e_1 = 1,\\
&u_2 = p_2 - \langle p_2, e_1\rangle e_1 = t - \langle t, 1\rangle = t + \int_0^1 t\ln(t)dt = t - \tfrac{1}{4},\\
&\langle u_2, u_2\rangle = -\int_0^1 (t - \tfrac{1}{4})^2\ln(t)dt = \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{144}\\
&\Rightarrow e_2 = \frac{12}{\sqrt{7}}(t - \tfrac{1}{4}) = \frac{3}{\sqrt{7}}(4t-1).
\end{aligned}$$

**Svar**: $\{1, \frac{3}{\sqrt{7}}(4t-1)\}$ utgör en ON-bas för $U$.

(c) Enlingt sats 2.7 är $p(t)$ ortogonalprojektionen av $t^2$ på $U$, så

$$\begin{aligned}
p(t) = \langle t^2, e_1\rangle e_1 + \langle t^2, e_2\rangle e_2 &= -\int_0^1 t^2\ln(t)dt - \frac{9}{7}(4t-1)\int_0^1 t^2(4t-1)\ln(t)dt\\
&= \frac{1}{9} + \frac{9}{7}(4t-1)\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\Big) = \frac{1}{9} + \frac{5}{28}(4t-1) = \frac{5}{7}t - \frac{17}{252}.
\end{aligned}$$

**4**. (a) Visa identiteten

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

för alla vektorer **u** och **v** i ett linjärt rum med norm som kommer från en skalärprodukt. (3p)

(b) Antag att $A$ är en $n \times n$ matris som uppfyller $A^2 - A - 2I = 0$. Ange alla egenvärden som $A$ skulle kunna ha. (3p)

(c) Vad är fördelen med trunkerad SVD jämfört med SVD. (1p)

**Lösning**:

(a) För godtyckliga vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ har vi

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle\\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\\
&= 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

(b) Antag att $\lambda$ är ett egenvärde med egenvektor $\mathbf{x} \neq 0$. Vi får då $0 = (A^2 - A - 2I)\mathbf{x} = A\lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = (\lambda^2 - \lambda - 2)\mathbf{x}$. Vi kan multiplicera detta med $\mathbf{x}^T$ så får vi $0 = (\lambda^2 - \lambda - 2)\mathbf{x}^T\mathbf{x} = (\lambda^2 - \lambda - 2)\|\mathbf{x}\|^2$, men $\mathbf{x} \neq 0$ så $0 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$ måste gälla, dvs de enda möjliga egenvärdena är $\lambda = 2$ och $\lambda = -1$. Vi vet dock inte ifall både 2 och $-1$ är egenvärden.

(c) Trunkerad SVD ger lägre konditionstal än SVD och därmed bättre numerisk stabilitet. Man löser dock ett stört problem istället för det riktiga problemet, men detta leder oftast till mindre problem.

**5**. Antag att $f$ är en funktion som uppfyller $|f^{(k)}(x)| \leq M_k$ för alla $x$ och alla $0 \leq k \leq 4$. Låt

$$F(x,h) = \frac{4f(x+h) - 3f(x) - f(x-2h)}{6h}.$$

(a) Bestäm en övre gräns för beloppet av trunkeringsfelet till differensapproximationen $f'(x) \approx F(x,h)$. Den övre gränsen får bara bero på ett lämpligt $M_k$ och $h$. (Tips: Restterm på Lagrange-form.) (3p)

(b) Antag att man vid funktionsberäkningarna $f(x)$ har ett relativt fel på $10^{-9}$. Bestäm bästa möjliga steglängden $h$ så att uppskattningarna av totala felet blir så litet som möjligt. Formulera ditt svar i termer av lämpliga $M_k$. (3p)

**Lösning**:

(a) Taylorutveckling ger att det finns $\xi, \eta$ på intervallet $[x-2h, x+h]$ så att

$$\begin{aligned} F(x,h) = \frac{1}{6h}\Bigg( & 4\Big(f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)h^3\Big) - 3f(x) \\ & - \Big(f(x) + f'(x)(-2h) + \frac{1}{2}f''(x)(-2h)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\eta)(-2h)^3\Big)\Bigg) \\ = {} & f'(x) + \frac{1}{9}f^{(3)}(\xi)h^2 + \frac{2}{9}f^{(3)}(\eta)h^2 \end{aligned}$$

Trunkeringsfelet uppskattas av

$$\begin{aligned} |R_T| &= |F(x,h) - f'(x)| = |\frac{1}{9}f^{(3)}(\xi)h^2 + \frac{2}{9}f^{(3)}(\eta)h^2| \\ &\leq \frac{1}{9}|f^{(3)}(\xi)|h^2 + \frac{2}{9}|f^{(3)}(\eta)|h^2 \leq \frac{1}{9}M_3h^2 + \frac{2}{9}M_3h^2 = \frac{1}{3}M_3h^2 \end{aligned}$$

**Svar:** $|R_T| \leq \frac{1}{3}M_3h^2$.

(b) Funktionsberäkningsfelen ger $|\delta f(x)|/|f(x)| \leq 10^{-10} \Rightarrow |\delta f(x)| \leq 10^{-10}|f(x)| \leq 10^{-9}M_0$, så

$$|R_f| \leq \frac{4|\delta f(x+h)| + 3|\delta f(x)| + |\delta f(x-2h)|}{6h} \leq \frac{8M_0}{6 \cdot 10^9 h}.$$

Totala fel-uppskattningen blir $|R_T| + |R_f| \leq g(h) = \frac{1}{3}M_3h^2 + \frac{4}{3}10^{-9}M_0h^{-1}$. Optimala steglängden ges av $0 = g'(h) = \frac{2}{3}M_3h - \frac{4}{3}10^{-9}M_0h^{-2} \Rightarrow h^3 = 2 \cdot 10^{-9}M_0/M_3$.
**Svar:** $h = (2M_0/M_3)^{1/3} \cdot 10^{-3}$.

**6**. Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_2^2 - 1/2 \\ x_1 - x_2 + 1/2 \end{bmatrix}$ och $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x})\|^2$.

(a) Studera ekvationen $f(\mathbf{x}) = 0$. Gör två iterationer med modifierad Newtons metod (dvs använd Jacobianen i startpunkten för alla iterationer) med start i punkten $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)

(b) Studera minimeringsproblemet $\min g(\mathbf{x})$ då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Man önskar använda brantaste lutning metoden (steepest descent) med start i punkten $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna sökriktningen för första iterationen, men gör ingen linjesökning. (2p)

**Lösning**:

(a) Jacobianen blir $J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. I startpunkten $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ får vi $f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Modifierad Newtons metod ger $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(0)} = -f(\mathbf{x}^{(0)})$ som har lösning $\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi får $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $f(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 0 \end{bmatrix}$. Modifierad Newtons metod ger $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(1)} = -f(\mathbf{x}^{(1)})$ som har lösning $\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix}$. Vi får $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 7/8 \end{bmatrix}$.

(b) Målfunktionen är $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x})\|^2 = f_1^2 + f_2^2$. Gradienten kan uttryckas i Jacobianen $\nabla g = \begin{bmatrix} 2f_1\partial_{x_1}f_1 + 2f_2\partial_{x_1}f_2 \\ 2f_1\partial_{x_2}f_1 + 2f_2\partial_{x_2}f_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \partial_{x_1}f_1 & \partial_{x_1}f_2 \\ \partial_{x_2}f_1 & \partial_{x_2}f_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 2J^T f$. Brantaste lutningsmetoden ger då sökriktningen $\mathbf{s}^{(0)} = -\nabla g(\mathbf{x}^{(0)}) = -2(J(\mathbf{x}^{(0)}))^T f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix}$.

**7**. Antag att man vill lösa en ODE $y'(t) = f(t, y(t))$ numeriskt med approximationsmetoden som ges av

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \qquad k_1 = f(t_k, y_k) \qquad k_2 = f(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hk_1).$$

(a) Applicera metoden på problemet $y'(t) = \lambda y(t)$ för att bestämma metodens approximationsordning. (4p)

(b) Ange maximal steglängd $h$ som ger en stabil metod för problemet $y'(t) = -y(t)$. (2p)

**Lösning**:

(a) Test med $y' = \lambda y$ ger $k_1 = \lambda y_k$, $k_2 = \lambda(y_k + \frac{2}{3}hk_1) = \lambda(1 + \frac{2}{3}h\lambda)y_k$, $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) = (1 + \frac{1}{4}h\lambda + \frac{3}{4}h\lambda(1 + \frac{2}{3}h\lambda))y_k = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2)y_k$, så tillväxtfaktorn blir $1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2$. Exakt lösning från $(t_k, y_k)$ ger $u_k(t_{k+1}) = y_k e^{\lambda(t_{k+1}-t_k)} = y_k e^{h\lambda}$. Det lokala trunkeringsfelet blir $L_{k+1} = y_{k+1} - u_k(t_{k+1}) = y_{k+1} - y_k e^{h\lambda} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 - e^{h\lambda})y_k = \mathcal{O}(h^3)y_k = \mathcal{O}(h^3)$, så metoden har approximationsordning 2.

(b) För $\lambda = -1$ blir tillväxtfaktorn $1 - h + \frac{1}{2}h^2$. Vi får en stabil metod om $|1 - h + \frac{1}{2}h^2| \leq 1$. Vi är bara intresserade av $h > 0$, så villkoret blir $-1 \leq 1 - h + \frac{1}{2}h^2 \leq 1$ som är ekvivalent med $0 \leq \frac{1}{2}h^2 - h + 2 = \frac{1}{2}(h-1)^2 + \frac{3}{2}$ och $\frac{1}{2}h^2 - h \leq 0$. Den första olikheten är alltid uppfylld, och den andra ger $h \leq 2$ under förutsättningen $h > 0$.
**Svar:** Maximal steglängd är $h = 2$.

**8**. Studera $f(t) = \dfrac{4}{4 + t^2}$.

(a) Bestäm ett polynom $p(t)$ som interpolerar $f(t)$ i de 5 punkterna $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. (3p)

(b) Beräkna $\int_{-2}^{2} f(t)dt$ på tre sätt:

i. Integrera polynomet från (a),

ii. Använd Simpsons formel med funktionsvärden i punkterna $\{0, \pm 1, \pm 2\}$

iii. Beräkna integralen analytiskt.

Gav metod i. eller ii. bäst resultat? (4p)

(c) Kan man förvänta sig bättre resultat om man använder ett polynom som interpolerar $f(x)$ i fler punkter? Varför/varför inte? (1p)

**Lösning**:

(a) Vi har 5 punkter så vi behöver ett fjärdegrads-polynom. Newtons form är $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t(t-1) + c_3 t(t-1)(t+1) + c_4 t(t-1)(t+1)(t-2)$. Interpolationsvillkoren ger

$$\begin{aligned}
1 &= f(0) = p(0) = c_0 \\
4/5 &= f(1) = p(1) = c_0 + c_1 \\
4/5 &= f(-1) = p(-1) = c_0 - c_1 + 2c_2 \\
1/2 &= f(2) = p(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 + 6c_3 \\
1/2 &= f(-2) = p(-2) = c_0 - 2c_1 + 6c_2 - 6c_3 + 24c_4
\end{aligned}$$

Detta ger $c_0 = 1$, $c_1 = -1/5$, $c_2 = -1/5$, $c_3 = 1/20$, $c_4 = 1/40$, så polynomet blir $p(t) = 1 - \frac{1}{5}t - \frac{1}{5}t(t-1) + \frac{1}{20}t(t-1)(t+1) + \frac{1}{40}t(t-1)(t+1)(t-2) = 1 - \frac{9}{40}t^2 + \frac{1}{40}t^4$.

(b) i. Polynomet är symmetriskt så

$$\int_{-2}^{2} p(t)dt = 2\int_{0}^{2} p(t)dt = 2\left[t - \frac{3}{40}t^3 + \frac{1}{200}t^5\right]_0^2 = \frac{78}{25} = 3.12.$$

ii. $h = 1$, så Simpsons formel ger

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(t)dt &\approx \frac{1}{3}\big(f(-2) + 4f(-1) + 2f(0) + 4f(1) + f(2)\big) \\
&= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{16}{5} + 2 + \frac{16}{5} + \frac{1}{2}) = \frac{47}{15} = 3.1333\ldots
\end{aligned}$$

iii.

$$\int_{-2}^{2} \frac{4}{4+t^2}dt = \int_{-2}^{2} \frac{1}{1+(t/2)^2}dt = [2\arctan(t/2)]_{-2}^{2} = 4\frac{\pi}{4} = \pi \approx 3.14159265$$

Simpsons formel som bygger på andragradspolynom gav ett bättre resultat än interpolationen med fjärdegrads-polynomet, på grund av Runges fenomen.

(c) Nej! Runges fenomen uppträder vilket innebär att approximationen blir sämre mellan punkterna framförallt i ytterkanterna på intervallet.