MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Tentamen

Hjälpmedel: alla
Datum: 2020-10-10 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2020 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $\langle p(t), q(t)\rangle = (p(0) - p(1))(q(0) - q(1)) + p(1)q(1)$. Avgör ifall detta är en inre produkt på P_2, dvs rummet av andragradspolynom. (3p)

(b) Låt F vara definierad av

$$F(p)(t) = (t + 1)p'(t) + 2p(t) + tp(1).$$

Visa att F är en linjär avbildning $F : P_2 \to P_2$. (2p)

(c) Beskriv matrisen för avbildningen från (b) uppgiften uttryckt i basen $\{1, t, t^2\}$. (2p)

2. Betrakta systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = & -3x_1(t) & 4x_2(t) & -4x_3(t) \\ x_2'(t) = & 4x_1(t) & -x_2(t) & \\ x_3'(t) = & -4x_1(t) & & -5x_3(t) \end{cases}$

(a) Diagonalisera systemet. (4p)

(b) Lös systemet med begynnelsedata $\mathbf{x}(0) = [2 - 2a, -1 - 2a, 2 + a]^T$ där $a \in \mathbb{R}$. (2p)

(c) Avgör ifall systemet är stabilt, dels genom generell teori, dels genom att jämföra lösningarna för $a = 0$ med lösningar för små $a \neq 0$. (2p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Gör en kompakt QR-faktorisering av $A = Q_1R$ med hjälp av Gram-Schmidt metoden. (4p)

(b) Använd satsen om de fyra fundamentala underrrummen för att fylla ut Q_1 matrisen i A uppgiften till en ortogonal matris med hjälp av en lämplig noll-rums beräkning. (2p)

(c) Beräkna en ortogonalprojektion av $\mathbf{u} = [1, 2, 1, 4]^T$ på $\mathrm{V}(A)$. (2p)

4. Låt $f(x_1, x_2) = -4x_1 + 4x_2 + 2(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^4$. Vi söker minimera $f(\mathbf{x})$.

(a) Beräkna Hessianen av f. (2p)

(b) Bestäm en sökriktning $\mathbf{s}$ med hjälp av Newtons metod med start i punkten $\mathbf{x}^{(0)} = [0, -1]^T$. (2p)

(c) Utför exakt linjesökning i riktningen från (b) uppgiften. (2p)

5. (a) Låt A vara en godtycklig reell matris som uppfyller $A^T = -A$. Visa att dess egenvärden är imaginära. (4p)

(b) Antag att tre kvadratiska matriser A, B och C uppfyller $AC = CB$ och att C inte har egenvärde 0. Visa att A och B då har samma egenvärden. (3p)

6. Vi vill beräkna $\sqrt[3]{K}$ för $K \in \mathbb{R}$ genom att lösa $x^3 = K$ med iterativa algoritmer.
Låt $g_0(x) = \dfrac{K}{x^2}$ och $g_1(x) = \dfrac{1}{3}\Big(2x + \dfrac{K}{x^2}\Big)$.

(a) Visa att $\sqrt[3]{K}$ är en fixpunkt för båda funktionerna g_0 och g_1. (1p)

(b) Avgör vilken eller vilka av fixpunktsmetoderna $x_{k+1} = g_0(x_k)$ och $x_{k+1} = g_1(x_k)$ som kommer konvergera för $x_0 \neq \sqrt[3]{K}$ men nära roten. (3p)

(c) Visa att $x_{k+1} = g_1(x_k)$ är ekvivalent med Newtons metod. (3p)

7. Låt matrisen $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, där $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_6\}$ är en ON-mängd i $\mathbb{R}^6$, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ är en ON-mängd i $\mathbb{R}^5$, $\sigma_1 = 10^3$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 10^{-20}$,$\sigma_4 = 10^{-20}$.

(a) Bestäm matrisens rang. (1p)

(b) Bestäm matrisens (effektiva) konditionstal. (2p)

(c) Definiera en matris $\tilde{A}$ som ger en liten norm $\|A - \tilde{A}\|$, men ett mycket mer välkonditionerat minstakvadratproblem $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ange även normen $\|A - \tilde{A}\|$. (3p)

(d) Lös minstakvadratproblemen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med $\mathbf{b} = 2\mathbf{u}_2 + \epsilon \mathbf{u}_3 + 7\mathbf{u}_5$ och tolka resultatet. (Tips: Använd en matris uppkallad efter årets nobelpristagare i fysik.) (2p)

8. Studera det reella begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) = g(t)(y(t))^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ där funktionen $g(t)$ har funktionsvärden

t	0	1/4	1/2
g	16	-1	0

(a) Approximera $y(1/2)$ med trapetsmetoden för ODEer med steglängd $h = 1/4$. (3p)

(b) Utför variabelbytet $z(t) = (y(t))^{-2}$ och skriv upp lösningen $z(t)$ på integralform. (2p)

(c) Bestäm interpolationspolynomet $p(t)$ som interpolerar g i de givna punkterna. (2p)

(d) Approximera sedan $y(1/2)$ genom att integrera interpolationspolynomet $p(t)$. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag

Hjälpmedel: alla
Datum: 2020-10-10 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2020 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $\langle p(t), q(t)\rangle = (p(0) - p(1))(q(0) - q(1)) + p(1)q(1)$. Avgör ifall detta är en inre produkt på P_2, dvs rummet av andragradspolynom. (3p)

(b) Låt F vara definierad av

$$F(p)(t) = (t + 1)p'(t) + 2p(t) + tp(1).$$

Visa att F är en linjär avbildning $F : P_2 \to P_2$. (2p)

(c) Beskriv matrisen för avbildningen från (b) uppgiften uttryckt i basen $\{1, t, t^2\}$. (2p)

Lösning:

(a) Egenskaperna $\langle p(t), q(t)\rangle = \langle q(t), p(t)\rangle$, $\langle ap(t)+br(t), q(t)\rangle = a\langle p(t), q(t)\rangle+b\langle r(t), q(t)\rangle$ är enkla att verifiera. Vi får också $\langle p(t), p(t)\rangle = (p(0) - p(1))^2 + p(1)^2 \geq 0$, men likhet får vi omm $p(0) = p(1) = 0$. Detta innebär inte att $p(t) = 0$. T.ex. uppfyller $p(t) = t(t - 1)$ villkoret. Därför är det inte en inre produkt.

(b) $F(ap + bq)(t) = (t + 1)\frac{d}{dt}(ap(t) + bq(t)) + 2(ap(t) + bq(t)) + t(ap(1) + bq(1)) = a(t + 1)p'(t) + b(t+1)q'(t) + 2ap(t) + 2bq(t) + tap(1) + tbq(1) = aF(p)(t) + bF(q)(t)$ för alla $a, b \in \mathbb{R}$ och $p, q \in P_2$. Dessutom ser vi att $p'(t)$ har maximal grad 1 och $p(1)$ är en konstant, så $F(p)(t)$ får maximal grad 2. Alltså är F en linjär avbildning $F : P_2 \to P_2$.

(c) $F(1)(t) = 0+2+t = t+2$, $F(t)(t) = (t+1)+2t+t = 4t+1$, $F(t^2)(t) = (t+1)2t+2t^2+t = 4t^2 + 3t$. Uttryckt i basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ får vi matrisen för avbildningen

$$A = \begin{bmatrix}[F(1)]_{\mathcal{E}} & [F(t)]_{\mathcal{E}} & [F(t^2)]_{\mathcal{E}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

2. Betrakta systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x_1'(t) = & -3x_1(t) \quad 4x_2(t) \quad -4x_3(t)\\ x_2'(t) = & 4x_1(t) \quad -x_2(t)\\ x_3'(t) = & -4x_1(t) \quad -5x_3(t)\end{cases}$$

(a) Diagonalisera systemet. (4p)

(b) Lös systemet med begynnelsedata $\mathbf{x}(0) = [2 - 2a, -1 - 2a, 2 + a]^T$ där $a \in \mathbb{R}$. (2p)

(c) Avgör ifall systemet är stabilt, dels genom generell teori, dels genom att jämföra lösningarna för $a = 0$ med lösningar för små $a \neq 0$. (2p)

Lösning:

(a) Systemet kan formuleras som $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ 4 & -1 & 0\\ -4 & 0 & -5\end{bmatrix}$.

Vi söker egenvärden till A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}-3 & 4 & -4\\ 4 & -1 & 0\\ -4 & 0 & -5\end{vmatrix} = 81 + 9\lambda - 9\lambda^2 - \lambda^3 = -(-3 + \lambda)(3 + \lambda)(9 + \lambda).$$

Sök egenvektorer till de olika egenvärdena:

$$\lambda_1 = -9: \begin{bmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -3: \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 3: \begin{bmatrix} -6 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen är symmetrisk och alla egenvärden har multiplicitet ett, så egenvektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är automatiskt ortogonala. $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 3$. De normerade egenvektorerna ger $T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Egenvärdena ger $D = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ och vi får $A = TDT^T$. Med $\mathbf{y} = T^T\mathbf{x}$ får vi det diagonala systemet $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$.

(b) De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-9t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-3t} \\ y_3(t) = c_3 e^{3t} \end{cases}$. $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = T^T\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3a \end{bmatrix}$. Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{-9t} \\ 0 \\ 3ae^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-9t} + a\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

(c) Alla egenvärdena är inte negativa så systemet är inte stabilt. Vi ser att en liten störning av begynnelsedata för $a = 0$ gör att lösningen divergerar istället för att konvergera mot $[0, 0, 0]^T$. Alltså är systemet inte asymptotiskt stabilt.

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Gör en kompakt QR-faktorisering av $A = Q_1 R$ med hjälp av Gram-Schmidt metoden. (4p)

(b) Använd satsen om de fyra fundamentala underrrummen för att fylla ut Q_1 matrisen i A uppgiften till en ortogonal matris med hjälp av en lämplig noll-rums beräkning. (2p)

(c) Beräkna en ortogonalprojektion av $\mathbf{u} = [1, 2, 1, 4]^T$ på $\mathrm{V}(A)$. (2p)

Lösning:

(a) Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{-3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}. \qquad Q_1 = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Med $r_{jj} = \|u_j\|$ och $r_{ij} = (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ för $i \le j$ får vi $A = Q_1 R$ med

$$R = \begin{bmatrix}2 & 2 & -3\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

(b) $\mathrm{N}(A^T) = \mathrm{V}(A)^\perp = \mathrm{V}(Q_1R)^\perp = \mathrm{V}(Q_1)^\perp$ på grund av att R är inverterbar. De sista kolonnerna i Q ska utgöra en bas för $\mathrm{V}(Q_1)^\perp = \mathrm{N}(A^T)$. Vi söker därför

$$A^T\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & 1 & 0\\2 & 0 & 0 & 2 & 0\\-1 & 2 & -1 & -4 & 0\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix} y_3$$

Efter normering får vi tillsammans med Q_1 matrisen $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

(c) Då kolonnerna i Q_1 utgör en ON-bas för $\mathrm{V}(A)$ blir ortogonalprojektionen $Q_1Q_1^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$

4. Låt $f(x_1, x_2) = -4x_1 + 4x_2 + 2(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^4$. Vi söker minimera $f(\mathbf{x})$.

(a) Beräkna Hessianen av f. (2p)

(b) Bestäm en sökriktning $\mathbf{s}$ med hjälp av Newtons metod med start i punkten $\mathbf{x}^{(0)} = [0, -1]^T$. (2p)

(c) Utför exakt linjesökning i riktningen från (b) uppgiften. (2p)

Lösning:

(a) $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}-4 + 4(x_1 - x_2) + 4(x_1 + x_2)^3\\4 - 4(x_1 - x_2) + 4(x_1 + x_2)^3\end{bmatrix}, H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}4 + 12(x_1 + x_2)^2 & -4 + 12(x_1 + x_2)^2\\-4 + 12(x_1 + x_2)^2 & 4 + 12(x_1 + x_2)^2\end{bmatrix}$

(b) Newtons metod ger $H(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}16 & 8 & 4\\8 & 16 & 4\end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{s} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

(c) Linjesökningen innebär att vi vill minimera $g(t) = f(\mathbf{x}^{(0)} + t\mathbf{s}) = -\frac{2}{3}t + 4(\frac{1}{6}t - 1) + 2 + (\frac{1}{3}t - 1)^4$. Vi söker stationär punkt $0 = g'(t) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{6}t + \frac{4}{3}(\frac{1}{3}t - 1)^3 = \frac{4}{3}(\frac{1}{3}t - 1)^3$. Så $g'(3) = 0$, $g'(t) < 0$ för $t < 0$ och $g'(t) > 0$ för $t > 0$, så $t = 3$ ger minpunkten för linjesökningen. Så $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + 3\mathbf{s} = [1/2, -1/2]^T$.

5. (a) Låt A vara en godtycklig reell matris som uppfyller $A^T = -A$. Visa att dess egenvärden är imaginära. (4p)

(b) Antag att tre kvadratiska matriser A, B och C uppfyller $AC = CB$ och att C inte har egenvärde 0. Visa att A och B då har samma egenvärden. (3p)

Lösning:

(a) Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig egenvektor med egenvärde λ. Komplexkonjungerar och transponerar man sambandet $\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ får man $\bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T = \bar{\mathbf{x}}^T A^T = -\bar{\mathbf{x}}^T A$. Multiplikation med $\mathbf{x}$ ger $\bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = -\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = -\lambda\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$. På grund av att en egenvektor aldrig kan vara nollvektorn och $\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} > 0$ för alla noll-skilda vektorer $\mathbf{x}$ kan vi dra slutsatsen $\bar{\lambda} = -\lambda$, dvs egenvärdet λ är imaginärt.

(b) Matrisen C har inte egenvärde 0, så C^{-1} existerar. Vi får därför sambandet $A = CBC^{-1}$, dvs A och B är similära. Similära matriser har samma egenvärden på grund av att de har samma karakteristiska polynom $\det(A - \lambda I) = \det(CBC^{-1} - \lambda I) = \det(C(B - \lambda I)C^{-1}) = \det(C)\det(B - \lambda I)1/\det(C) = \det(B - \lambda I)$.

6. Vi vill beräkna $\sqrt[3]{K}$ för $K \in \mathbb{R}$ genom att lösa $x^3 = K$ med iterativa algoritmer. Låt $g_0(x) = \dfrac{K}{x^2}$ och $g_1(x) = \dfrac{1}{3}\Big(2x + \dfrac{K}{x^2}\Big)$.

(a) Visa att $\sqrt[3]{K}$ är en fixpunkt för båda funktionerna g_0 och g_1. (1p)

(b) Avgör vilken eller vilka av fixpunktsmetoderna $x_{k+1} = g_0(x_k)$ och $x_{k+1} = g_1(x_k)$ som kommer konvergera för $x_0 \neq \sqrt[3]{K}$ men nära roten. (3p)

(c) Visa att $x_{k+1} = g_1(x_k)$ är ekvivalent med Newtons metod. (3p)

Lösning:

(a) $g_0(\sqrt[3]{K}) = \frac{K}{K^{2/3}} = K^{1/3} = \sqrt[3]{K}$, $g_1(\sqrt[3]{K}) = \frac{1}{3}(2\sqrt[3]{K} + \frac{K}{K^{2/3}}) = \frac{1}{3}(2\sqrt[3]{K} + K^{1/3}) = \sqrt[3]{K}$. Alltså är $\sqrt[3]{K}$ en fixpunkt för g_0 och g_1.

(b) $g_0'(x) = -2Kx^{-3}$ ger $|g_0'(\sqrt[3]{K})| = |-2| = 2 \geq 1$ så fixpunktsmetoden $x_{k+1} = g_0(x_k)$ konvergerar inte för $x_0 \neq \sqrt[3]{K}$. $g_1'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}Kx^{-3}$ ger $g_1'(\sqrt[3]{K}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$. $g_1'(x)$ är kontinuerlig så $|g_1'(x)| < 1$ i en omgivning av $x = \sqrt[3]{K}$. Därför konvergerar metoden för alla x nära roten.

(c) Newtons metod för $f(x) = x^3 - K$ ger $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - K}{3x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k + \frac{K}{3x_k} = \frac{1}{3}(2x_k + \frac{K}{x_k^2}) = g_1(x_k)$, så Newtons metod är ekvivalent med $x_{k+1} = g_1(x_k)$.

7. Låt matrisen $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, där $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_6\}$ är en ON-mängd i $\mathbb{R}^6$, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ är en ON-mängd i $\mathbb{R}^5$, $\sigma_1 = 10^3$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 10^{-20}$,$\sigma_4 = 10^{-20}$.

(a) Bestäm matrisens rang. (1p)

(b) Bestäm matrisens (effektiva) konditionstal. (2p)

(c) Definiera en matris $\tilde{A}$ som ger en liten norm $\|A - \tilde{A}\|$, men ett mycket mer välkonditionerat minstakvadratproblem $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ange även normen $\|A - \tilde{A}\|$. (3p)

(d) Lös minstakvadratproblemen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med $\mathbf{b} = 2\mathbf{u}_2 + \epsilon\mathbf{u}_3 + 7\mathbf{u}_5$ och tolka resultatet. (Tips: Använd en matris uppkallad efter årets nobelpristagare i fysik.) (2p)

Lösning:

(a) Antalet nollskillda singulära värden är 4, så matrisens rang är 4.

(b) Det effektiva konditionstalet är $\kappa(A) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_4} = \dfrac{10^3}{10^{-20}} = 10^{23}$.

(c) Vi har två singulära värden som är mycket små. Vi bör därför trunkera dessa. $\tilde{A} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ ger $A - \tilde{A} = \displaystyle\sum_{i=3}^{4} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$. Matrisnormen ges av största singulära värdet så $\|A - \tilde{A}\| = \sigma_3 = 10^{-20}$. $\kappa(\tilde{A}) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = 10^3$, så minstakvadratproblemet $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ blir mycket mer välkonditionerat.

(d) Moore-Penrose pseudo-inverserna ges av $A^\dagger = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \sigma_i^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$ och $\tilde{A}^\dagger = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \sigma_i^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$. På grund av att $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_6\}$ är en ON-mängd får vi $\mathbf{u}_1^T\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{u}_2^T\mathbf{b} = 2$, $\mathbf{u}_3^T\mathbf{b} = \epsilon$, $\mathbf{u}_4^T\mathbf{b} = 0$. Minstakvadratlösningarna blir $\hat{\mathbf{x}} = A^\dagger\mathbf{b} = 2\sigma_2^{-1}\mathbf{v}_2 + \epsilon\sigma_3^{-1}\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2 + 10^{20}\epsilon\mathbf{v}_3$ respektive $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{A}^\dagger\mathbf{b} = 2\sigma_2^{-1}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$. Vi ser att små störningar i $\mathbf{b}$ ger stora förändringar i $\hat{\mathbf{x}}$ men inte i $\tilde{\mathbf{x}}$. Alltså är den trunkerade SVD metoden stabilare.

8. Studera det reella begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) = g(t)(y(t))^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ där funktionen $g(t)$ har funktionsvärden

t	0	1/4	1/2
g	16	-1	0

(a) Approximera $y(1/2)$ med trapetsmetoden för ODEer med steglängd $h = 1/4$. (3p)

(b) Utför variabelbytet $z(t) = (y(t))^{-2}$ och skriv upp lösningen $z(t)$ på integralform. (2p)

(c) Bestäm interpolationspolynomet $p(t)$ som interpolerar g i de givna punkterna. (2p)

(d) Approximera sedan $y(1/2)$ genom att integrera interpolationspolynomet $p(t)$. (2p)

Lösning:

(a) Trapetsmetoden ger $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(g(t_k)y_k^3 + g(t_{k+1})y_{k+1}^3)$. $y_0 = 1$ och $t_k = kh = k/4$ ger $y_1 = 1 + \frac{1}{8}(g(0) + g(1/4)y_1^3) = 3 - \frac{1}{8}y_1^3$. Ekvationen har lösning $y_1 = 2$ (de andra lösningarna är komplexa). $y_2 = y_1 + \frac{1}{8}(g(1/4)y_1^3 + g(1/2)y_2^3) = 2 + \frac{1}{8}(-8 + 0) = 1$.
Svar: $y(1/2) \approx y_1 = 1$.

(b) $z(t) = (y(t))^{-2}$ ger $z'(t) = -2(y(t))^{-3}y'(t) = -2(y(t))^{-3}(y(t))^3 g(t) = -2g(t)$, så $z(t) = z(0) - 2\int_0^t g(x)dx$, men $z(0) = (y(0))^{-2} = 1$ så $z(t) = 1 - 2\int_0^t g(x)dx$.

(c) Vi har 3 punkter så vi behöver ett andragradspolynom. Newtons form är $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t(t - 1/4)$. Interpolationsvillkoren ger

$$\begin{aligned} 16 &= g(0) = p(0) = c_0 \\ -1 &= g(1/4) = p(1/4) = c_0 + c_1/4 \\ 0 &= g(1/2) = p(1/2) = c_0 + c_1/2 + c_2(1/2)(1/2 - 1/4) \end{aligned}$$

Detta ger $c_0 = 16$, $c_1 = -68$, $c_2 = 144$, så interpolationspolynomet blir
$p(t) = 16 - 68t + 144t(t - 1/4) = 16 - 104t + 144t^2$.

(d) $z(t) = 1 - 2\int_0^t g(x)dx \approx 1 - 2\int_0^t p(x)dx = 1 - 32t + 104t^2 - 96t^3 \Rightarrow z(1/2) \approx -1 \Rightarrow$ $y(1/2) = (z(1/2))^{-1/2} \approx -i$.
Svar: $y(1/2) \approx -i$. (Uppgiften blev inte riktigt som den var tänkt.)