MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Tentamen

Hjälpmedel: alla
Datum: 2020-08-27 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2020 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av en spegling i planet genom origo med normal $\mathbf{n}_1 = [1, 0, 1]^T$ följt av en ortogonalprojektion på planet genom origo med normal $\mathbf{n}_2 = [1, 0, -1]^T$.

(a) Välj en lämplig bas $\mathcal{E}'$ så att matrisen för F i basen $\mathcal{E}'$ blir enkel. Svara med både bas och matris. (3p)

(b) Utför ett basbyte till standardbasen $\mathcal{E}$ för $\mathbb{R}^3$ och beskriv matrisen för F i basen $\mathcal{E}$. (2p)

2. Låt

$$\langle p(t), q(t)\rangle = \int_1^\infty p(t)q(t)t^{-4}dt.$$

Låt $V \subset C(1,\infty)$ vara mängden av reella kontinuerliga funktioner $p(t)$ på intervallet $[1,\infty[$ som har $\langle p(t), p(t)\rangle < \infty$.
Låt U vara det underrum av V som spänns upp av $\{1, t, t^{-1}\}$.

(a) Visa att V är ett underrum av vektorrummet $C(1,\infty)$. (3p)

(b) Visa att $\langle p(t), q(t)\rangle$ är en skalärprodukt på V. (3p)

(c) Bestäm en ortogonal bas för underrummet U. (4p)

(d) Låt $r(t) \in V$ vara en given funktion och vi vill bestämma en funktion $f(t) \in U$ som minimerar $\langle f(t) - r(t), f(t) - r(t)\rangle$.
Skriv upp ett uttryck för $f(t)$ med hjälp av integraler som beror på $r(t)$? (2p)

3. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_3^2$ där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en matris A så att $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. (1p)

(b) Ortogonalt diagonalisera matrisen A. (Tips: Egenvärdena är heltal.) (4p)

(c) Karakterisera den kvadratiska formen som positivt/negativt definit/semi-definit eller indefinit. (1p)

(d) Låt $f(\mathbf{x}) = c + \mathbf{x}^T\mathbf{v} + Q(\mathbf{x})$, där $c \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ är konstanta.
Vi söker extrempunkten till $f(\mathbf{x})$ med Newtons metod med steglängd $\alpha = 1$ utgående från en initial-gissning $\mathbf{x}^{(0)}$.
Uttryck resultatet $\mathbf{x}^{(1)}$ efter en iteration och visa att en iteration räcker för att hitta extrempunkten oavsett värdena på c, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{x}^{(0)}$.
Avgör även om extrempunkten är max eller min punkt. Ditt uttryck för $\mathbf{x}^{(1)}$ får innehålla symbolerna A, A^{-1}, $\mathbf{v}$ och c. Du behöver alltså inte räkna ut A^{-1}. (3p)

4. Studera begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) = g(t)y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ där funktionen $g(t)$ har funktionsvärden

t	0	$1/2$	1
g	-1	-2	-1

(a) Approximera $y(1)$ med Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 1/2$. (3p)

(b) Utför variabelbytet $z(t) = \ln y(t)$ och skriv upp lösningen $z(t)$ på integralform. Approximera sedan $y(1)$ med hjälp av Simpsons regel. (3p)

5. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$.

t	1.0	1.1	1.4
f	2.0	2.1	2.2

Antag också att $f \in C^2([1, 1.4])$ och $|f''(t)| \leq 4$ för alla $t \in [1, 1.4]$.

(a) Använd Taylorutveckling för att visa att framåt-differens för $f'(t)$ ger trunkeringsfel $\frac{1}{2}hf''(\xi)$ där $t \leq \xi \leq t + h$. (2p)

(b) Approximera $f'(1.0)$ så noggrant som möjligt med hjälp av framåt-differens och skatta både approximationsfelet och avrundningsfelet. Funktionsvärdena är korrekt avrundade till en decimal. (3p)

(c) Bestäm ett polynom $p(t)$ som interpolerar $f(t)$ i de givna punkterna. (2p)

6. En matris A har en LU-faktorisering med $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en bas för $V(A)$ utan att beräkna hela matrisen A. (2p)

(b) Bestäm en bas för $N(A^T)^\perp$. (1p)

(c) Avgör genom att enbart titta på matrisen L ifall pivotering har använts vid faktoriseringen. (1p)

(d) Vilket mått på felförstärkning förbättras med hjälp av pivotering? (1p)

7. (a) Låt U vara ett vektorrum, låt $F : U \to U$ vara en linjär avbildning och låt $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vara en ON-bas för U bestående av egenvektorer till F. Visa att F är en symmetrisk avbildning. (4p)

(b) Antag att $\mathbf{x}$ är en egenvektor till en matris A. Hur beräknar man då enklast motsvarande egenvärde? Visa att din formel ger egenvärdet. (2p)

8. Låt $t_0 = -\epsilon$, $t_1 = 0$, $t_2 = \epsilon$ där $0 < \epsilon < 1$. Man vill med hjälp av minstakvadratmetoden anpassa en linjär funktion $f(t) = c_0 + c_1 t$ till mätdata $f(t_0) = 3$, $f(t_1) = -1$, $f(t_1) = 1$.

(a) Skriv det överbestämda problemet på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och lös minstakvadrat-problemet med hjälp av normal-ekvationerna. (2p)

(b) Utför en kompakt singulärvärdesfaktorisering (SVD) $A = U_1\Sigma_1V_1^T$. (Tips: Diagonalisering av A^TA ger två av matriserna, den tredje kan man sedan lösa ut från $A = U_1\Sigma_1V_1^T$.) (3p)

(c) Lös minstakvadrat-problemet med hjälp av SVD-faktoriseringen. (1p)

(d) Beräkna (det effektiva) konditionstalet $\kappa(A)$ och kommentera vad som händer om ϵ blir litet. (2p)

(e) Lös minstakvadrat-problemet med trunkerad SVD. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: alla**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2020-08-27 kl. 08.30–12.30
Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag 031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2020 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av en spegling i planet genom origo med normal $\mathbf{n}_1=[1,0,1]^T$ följt av en ortogonalprojektion på planet genom origo med normal $\mathbf{n}_2=[1,0,-1]^T$.

(a) Välj en lämplig bas $\mathcal{E}'$ så att matrisen för F i basen $\mathcal{E}'$ blir enkel. Svara med både bas och matris. (3p)

(b) Utför ett basbyte till standardbasen $\mathcal{E}$ för $\mathbb{R}^3$ och beskriv matrisen för F i basen $\mathcal{E}$. (2p)

Lösning:

(a) Låt $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vara speglingen och $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vara ortogonalprojektionen. Låt $\mathbf{f}_1=\mathbf{n}_1$, $\mathbf{f}_2=\mathbf{n}_2$ och $\mathbf{f}_3$ vara ortogonal mot $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. T.ex. $\mathbf{f}_3=[0,1,0]^T$. På grund av att både $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ är ortogonala mot $\mathbf{f}_1$ och G är en spegling i planet ortogonalt med normal $\mathbf{f}_1$ får vi $G(\mathbf{f}_1)=-\mathbf{f}_1$, $G(\mathbf{f}_2)=\mathbf{f}_2$ och $G(\mathbf{f}_3)=\mathbf{f}_3$. Då H är en ortogonalprojektion på planet med normal $\mathbf{f}_2$ får vi $H(\mathbf{f}_1)=\mathbf{f}_1$, $H(\mathbf{f}_2)=0$, $H(\mathbf{f}_3)=\mathbf{f}_3$. Sätter vi samman $F=H\circ G$ får vi $F(\mathbf{f}_1)=-\mathbf{f}_1$, $F(\mathbf{f}_2)=0$ och $F(\mathbf{f}_3)=\mathbf{f}_3$. I basen $\mathcal{E}'=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ får F matrisen $A'=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(b) Transformationsmatrisen $T=\begin{bmatrix}[\mathbf{f}_1]_\mathcal{E} & [\mathbf{f}_2]_\mathcal{E} & [\mathbf{f}_3]_\mathcal{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ beskriver ett basbyte från $\mathcal{E}$ till $\mathcal{E}'$, så om A är matrisen för F i basen $\mathcal{E}$ får vi sambandet $A'=T^{-1}AT$. Vänder vi på sambandet får vi $A=TA'T^{-1}$. Räknar vi ut matrisinversen $T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&2&0\end{bmatrix}$ får vi till slut matrisen för F i basen $\mathcal{E}$

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&2&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}.$$

2. Låt

$$\langle p(t),q(t)\rangle=\int_1^\infty p(t)q(t)t^{-4}dt.$$

Låt $V\subset C(1,\infty)$ vara mängden av reella kontinuerliga funktioner $p(t)$ på intervallet $[1,\infty[$ som har $\langle p(t),p(t)\rangle<\infty$.
Låt U vara det underrum av V som spänns upp av $\{1,t,t^{-1}\}$.

(a) Visa att V är ett underrum av vektorrummet $C(1,\infty)$. (3p)

(b) Visa att $\langle p(t),q(t)\rangle$ är en skalärprodukt på V. (3p)

(c) Bestäm en ortogonal bas för underrummet U. (4p)

(d) Låt $r(t) \in V$ vara en given funktion och vi vill bestämma en funktion $f(t) \in U$ som minimerar $\langle f(t) - r(t), f(t) - r(t) \rangle$.
Skriv upp ett uttryck för $f(t)$ med hjälp av integraler som beror på $r(t)$? (2p)

Lösning:

(a) Låt $p(t), q(t) \in V$ och $a, b \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga. $ap + bq \in C(1, \infty)$ på grund av att $C(1, \infty)$ är ett vektorrum. Från $0 \leq (p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$ får man $2pq \leq p^2 + q^2$. Använder vi detta får vi

$$\begin{aligned}\langle ap + bq, ap + bq \rangle &= \int_1^\infty (ap + bq)^2 t^{-4} dt = \int_1^\infty (a^2p^2 + 2abpq + b^2q^2) t^{-4} dt \\ &\leq \int_1^\infty (a^2p^2 + |a||b|(p^2 + q^2) + b^2q^2) t^{-4} dt \\ &= (a^2 + |a||b|)\langle p, p \rangle + (|a||b| + b^2)\langle q, q \rangle < \infty\end{aligned}$$

Mängden V är en delmängd av ett vektorrum och är sluten under linjärkombinationer så V är ett underrum.

(b) Den är symmetrisk: $\langle p(t), q(t) \rangle = \int_1^\infty p(t)q(t)t^{-4} dt = \langle q(t), p(t) \rangle$, linjär i första argumentet: $\langle ap(t) + br(t), q(t) \rangle = \int_1^\infty (ap(t) + br(t))q(t)t^{-4} dt = a \int_1^\infty p(t)q(t)t^{-4} dt + b \int_1^\infty r(t)q(t)t^{-4} dt = a\langle p(t), q(t) \rangle + b\langle r(t), q(t) \rangle$. Vi har även $\langle p(t), p(t) \rangle = \int_1^\infty (p(t)t^{-2})^2 dt \geq 0$. På grund av kontinuitet får vi även att likhet endast om $p(t) = 0$ på hela intervallet. Utan kontinuiteten hade $p(t)$ kunnat vara nollskild på t.ex. enstaka punkter. Vi drar slutsatsen att det är en skalärprodukt.

(c) Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^{-1}$ ger

$$\begin{aligned}&u_1 = p_1 = 1, \langle u_1, u_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \tfrac{1}{3} \Rightarrow e_1 = \sqrt{3}, \\ &u_2 = p_2 - \langle p_2, e_1 \rangle e_1 = t - \langle t, 1 \rangle 3 = t - \tfrac{3}{2}, \langle u_2, u_2 \rangle = \int_1^\infty (\tfrac{9}{4}t^{-4} - 3t^{-3} + t^{-2}) dt = \tfrac{1}{4} \\ &\Rightarrow e_2 = 2u_2 = 2t - 3, \\ &u_3 = p_3 - \langle p_3, e_1 \rangle e_1 - \langle p_3, e_2 \rangle e_2 = t^{-1} - \langle t^{-1}, 1 \rangle 3 - \langle t^{-1}, 2t - 3 \rangle (2t - 3) \\ &= \tfrac{1}{6}t - 1 + t^{-1}, \langle u_3, u_3 \rangle = \int_1^\infty (t^{-6} - 2t^{-5} + \tfrac{4}{3}t^{-4} - \tfrac{1}{3}t^{-3} + \tfrac{1}{36}t^{-2}) dt = \tfrac{1}{180} \\ &\Rightarrow e_3 = 6\sqrt{5}u_3 = \sqrt{5}(t - 6 + 6t^{-1})\end{aligned}$$

Svar: $\{\sqrt{3}, 2t - 3, \sqrt{5}(t - 6 + 6t^{-1})\}$ utgör en ON-bas för U.
(Man behöver dock inte normera vektorerna för att få ett korrekt svar.)

(d) $f(t)$ är ortogonalprojektionen av $r(t)$ på U. Då $\{e_1, e_2, e_3\}$ utgör en ON-bas för U, får vi $f = \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \langle r, e_3 \rangle e_3$, dvs

$$\begin{aligned}f(t) = 3 \int_1^\infty r(s)s^{-4} ds &+ (2t - 3) \int_1^\infty r(s)(2s - 3)s^{-4} ds \\ &+ 5(t - 6 + 6t^{-1}) \int_1^\infty r(s)(s - 6 + 6s^{-1})s^{-4} ds\end{aligned}$$

3. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_3^2$ där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en matris A så att $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. (1p)

(b) Ortogonalt diagonalisera matrisen A. (Tips: Egenvärdena är heltal.) (4p)

(c) Karakterisera den kvadratiska formen som positivt/negativt definit/semi-definit eller indefinit. (1p)

(d) Låt $f(\mathbf{x}) = c + \mathbf{x}^T\mathbf{v} + Q(\mathbf{x})$, där $c \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ är konstanta.
Vi söker extrempunkten till $f(\mathbf{x})$ med Newtons metod med steglängd $\alpha = 1$ utgående från en initial-gissning $\mathbf{x}^{(0)}$.
Uttryck resultatet $\mathbf{x}^{(1)}$ efter en iteration och visa att en iteration räcker för att hitta extrempunkten oavsett värdena på c, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{x}^{(0)}$.
Avgör även om extrempunkten är max eller min punkt. Ditt uttryck för $\mathbf{x}^{(1)}$ får innehålla symbolerna A, A^{-1}, $\mathbf{v}$ och c. Du behöver alltså inte räkna ut A^{-1}. (3p)

Lösning:

(a) **Svar:** $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Bestäm egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -2 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2-2\lambda \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(10-\lambda).$$

Egenvärdena blir därför $\lambda_1 = 1$ med multiplicitet 2 och $\lambda_2 = 10$ med multiplicitet 1.

Sök egenvektorer till $\lambda_1 = 1$: $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Detta ger $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. De är inte ortogonala, men $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ är ortogonala. En ON-bas för egenrummet $E(1)$ utgörs av $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\}$.

Sök egenvektorer till $\lambda_2 = 10$:

$$(A - 10\lambda_1 I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Detta ger $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normering ger $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Diagonaliseringen blir $A = TDT^T$ med $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ och $T = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 3 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

(c) Alla egenvärdena är positiva, så den kvadratiska formen är positivt definit.

(d) Vi har $f(\mathbf{x}) = c + \mathbf{v}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Gradienten och Hessianen blir $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + 2A\mathbf{x}$ och $H(\mathbf{x}) = 2A$. Newtons metod ger $H(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ och $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} + \mathbf{x}^{(k)}$. I vårt fall får vi $2A\mathbf{s}^{(0)} = -\mathbf{v} - 2A\mathbf{x}^{(0)}$. A är positivt definit, så A^{-1} existerar.

$\mathbf{s}^{(0)} = A^{-1}(-\frac{1}{2}\mathbf{v} - A\mathbf{x}^{(0)}) = -\frac{1}{2}A^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{x}^{(0)}$. Så $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{s}^{(0)} + \mathbf{x}^{(0)} = -\frac{1}{2}A^{-1}\mathbf{v}$. Detta är en extrempunkt ty $\nabla f(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{v} + 2A\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{v} - AA^{-1}\mathbf{v} = 0$. Hessianen är positivt definit överallt, så detta är en global minpunkt. Vi når alltså fram till minpunkten efter en iteration oavsett startpunkt. Minpunktens läge beror dock på $\mathbf{v}$.
Svar: $\mathbf{x}^{(1)} = -\frac{1}{2}A^{-1}\mathbf{v}$.

4. Studera begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) = g(t)y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ där funktionen $g(t)$ har funktionsvärden

t	0	1/2	1
g	-1	-2	-1

(a) Approximera $y(1)$ med Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 1/2$. (3p)

(b) Utför variabelbytet $z(t) = \ln y(t)$ och skriv upp lösningen $z(t)$ på integralform. Approximera sedan $y(1)$ med hjälp av Simpsons regel. (3p)

Lösning:

(a) Eulers bakåtmetod ger $y_{k+1} = y_k + hg(t_{k+1})y_{k+1} \Rightarrow y_{k+1} = \dfrac{y_k}{1 - hg(t_{k+1})}$. Med $y_0 = 1$ och $h = \dfrac{1}{2}$ får vi $y_1 = \dfrac{y_0}{1 - \frac{1}{2}g(\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2}$ och $y_2 = \dfrac{y_1}{1 - \frac{1}{2}g(1)} = \dfrac{1}{3}$.
Svar: $y(1) \approx 1/3$.

(b) $z(t) = \ln y(t)$ ger $z'(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{g(t)y(t)}{y(t)} = g(t)$. Alltså är $z(t) = \int_0^t g(s)ds$. Simpsons regel ger $z(1) \approx \frac{1-0}{6}(g(0) + 4g(\frac{1}{2}) + g(1)) = -\frac{5}{3}$. Alltså är $y(1) \approx e^{-5/3} \approx 0.1889$.

5. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$.

t	1.0	1.1	1.4
f	2.0	2.1	2.2

Antag också att $f \in C^2([1, 1.4])$ och $|f''(t)| \leq 4$ för alla $t \in [1, 1.4]$.

(a) Använd Taylorutveckling för att visa att framåt-differens för $f'(t)$ ger trunkeringsfel $\frac{1}{2}hf''(\xi)$ där $t \leq \xi \leq t + h$. (2p)

(b) Approximera $f'(1.0)$ så noggrant som möjligt med hjälp av framåt-differens och skatta både approximationsfelet och avrundningsfelet. Funktionsvärdena är korrekt avrundade till en decimal. (3p)

(c) Bestäm ett polynom $p(t)$ som interpolerar $f(t)$ i de givna punkterna. (2p)

Lösning:

(a) Taylorutveckling ger $f(t + h) = f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2$ för något $t \leq \xi \leq t + h$. Framåt-differens ger då trunkeringsfelet

$$R_T = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t) = \frac{f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 - f(t) - f'(t)h}{h} = \frac{1}{2}f''(\xi)h.$$

(b) Trunkeringsfelet kan uppskattas med $|R_T| \leq \frac{h}{2}|f''(\xi)| \leq 2h$. Avrundning ger $|\delta f| \leq 0.05$. Detta ger avrundningsfel i differenskvoten $|R_f| \leq \dfrac{|\delta f(t+h)| + |\delta f(t)|}{h} \leq \frac{0.1}{h}$.
Vi har två möjliga val av h. Valet $h = 0.1$ ger totalt fel $|R_T| + |R_f| \leq 0.2 + 1 = 1.2$, men $h = 0.4$ ger totalt fel $|R_T| + |R_f| \leq 0.8 + 0.25 = 1.05$. Därför ska vi välja $h = 0.4$ och får då $f'(1.0) \approx \dfrac{f(1.4) - f(1.0)}{0.4} = \dfrac{0.2}{0.4} = 0.5$.
Svar: $|f'(1.0) - 0.5| \leq 1.05$.

(c) Vi har 3 punkter så vi behöver ett andragradspolynom. Newtons form är $p(t) = c_0 + c_1(t-1) + c_2(t-1)(t-1.1)$. Interpolationsvillkoren ger

$$\begin{aligned} 2 &= f(1) = p(1) = c_0 \\ 2.1 &= f(1.1) = p(1.1) = c_0 + c_1(1.1-1) \\ 2.2 &= f(1.4) = p(1.4) = c_0 + c_1(1.4-1) + c_2(1.4-1)(1.4-1.1) \end{aligned}$$

Detta ger $c_0 = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = -5/3$, så interpolationspolynomet blir $p(t) = 2 + (t-1) - \frac{5}{3}(t-1)(t-1.1) = -\frac{5}{6} + \frac{9}{2}t - \frac{5}{3}t^2$.

6. En matris A har en LU-faktorisering med $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en bas för $V(A)$ utan att beräkna hela matrisen A. (2p)

(b) Bestäm en bas för $N(A^T)^\perp$. (1p)

(c) Avgör genom att enbart titta på matrisen L ifall pivotering har använts vid faktoriseringen. (1p)

(d) Vilket mått på felförstärkning förbättras med hjälp av pivotering? (1p)

Lösning:

(a) U är radekvivalent med A. Detta gör att om några kolonner i U är linjärt oberoende och spänner upp $V(U)$, så är motsvarande kolonner i A också linjärt oberoende och spänner upp $V(A)$. Man kan t.ex se att andra och fjärde kolonnen i U utgör en bas för $V(U)$. Motsvarande kolonner i A är då $L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ utgör en bas för $V(A)$.

(b) Satsen om de fyra fundamentala underrummen säger att $N(A^T)^\perp = V(A)$ så svaret är detsamma som i (a) uppgiften.

(c) Man gör pivotering för att elementen i L ska bli till beloppet högst 1. L matrisen uppfyller inte detta villkor, så pivotering har inte använts vid faktoriseringen.

(d) Konditionstalet $\kappa(L)$ förbättras vid pivoteringen. Om man löser $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ger $\kappa(L)$ ett mått på den relativa fel-förstärkningen via $\frac{\|\delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \kappa(L)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$.

7. (a) Låt U vara ett vektorrum, låt $F : U \to U$ vara en linjär avbildning och låt $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vara en ON-bas för U bestående av egenvektorer till F. Visa att F är en symmetrisk avbildning. (4p)

(b) Antag att $\mathbf{x}$ är en egenvektor till en matris A. Hur beräknar man då enklast motsvarande egenvärde? Visa att din formel ger egenvärdet. (2p)

Lösning:

(a) Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ beteckna egenvärdena till $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Låt $\mathbf{u} \in U$ och $\mathbf{v} \in U$ vara godtyckliga vektorer. Vi kan uttrycka dem i basen som $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$ och $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j$.

Utnyttjar vi att F är linjär och att skalärprodukten är linjär i båda argumenten, får vi

$$\langle F(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle F(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \lambda_i.$$

I de sista stegen utnyttjade vi $F(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$ och $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$. På samma sätt får vi

$$\langle \mathbf{u}, F(\mathbf{v})\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, F(\mathbf{e}_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \lambda_i.$$

Alltså får vi $\langle F(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, F(\mathbf{v})\rangle$ för godtyckliga $\mathbf{u} \in U$ och $\mathbf{v} \in U$, så F är en symmetrisk avbildning.

(b) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x}$. Då $\mathbf{x}$ är en egenvektor kan den inte vara noll vektorn så $\mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0$. Därför får vi egenvärdet i form a Rayleighkvoten $\lambda = \dfrac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$.

8. Låt $t_0 = -\epsilon$, $t_1 = 0$, $t_2 = \epsilon$ där $0 < \epsilon < 1$. Man vill med hjälp av minstakvadratmetoden anpassa en linjär funktion $f(t) = c_0 + c_1 t$ till mätdata $f(t_0) = 3$, $f(t_1) = -1$, $f(t_2) = 1$.

(a) Skriv det överbestämda problemet på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och lös minstakvadrat-problemet med hjälp av normal-ekvationerna. (2p)

(b) Utför en kompakt singulärvärdesfaktorisering (SVD) $A = U_1\Sigma_1 V_1^T$. (Tips: Diagonalisering av $A^T A$ ger två av matriserna, den tredje kan man sedan lösa ut från $A = U_1\Sigma_1 V_1^T$.) (3p)

(c) Lös minstakvadrat-problemet med hjälp av SVD-faktoriseringen. (1p)

(d) Beräkna (det effektiva) konditionstalet $\kappa(A)$ och kommentera vad som händer om ϵ blir litet. (2p)

(e) Lös minstakvadrat-problemet med trunkerad SVD. (2p)

Lösning:

(a) Att linjen ska gå genom punkterna kan formuleras som systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon \\ 1 & 0 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normalekvationerna är $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi får $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2\epsilon^2 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2\epsilon \end{bmatrix}$. Löser man ekvationssystemet får man $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{\epsilon} \end{bmatrix}$.

(b) Om $A = U_1\Sigma_1 V_1^T$ så blir $A^T A = (U_1\Sigma_1 V_1^T)^T U_1\Sigma_1 V_1^T = V_1\Sigma_1^T U_1^T U_1\Sigma_1 V_1^T$, men U_1 har ortonormala kolonner, så $U_1^T U_1 = I$. Σ_1 är kvadratisk och diagonal så $\Sigma_1^T = \Sigma_1$. Vi får därför $A^T A = V_1\Sigma_1^2 V_1^T$. Vi ser från (a) uppgiften att $A^T A$ är diagonal, så $V_1 = I$ och $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\epsilon \end{bmatrix}$. $A = U_1\Sigma_1 V_1^T$ ger då $U_1 = A\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

(c) Minstakvadratlösningen ges av $\hat{\mathbf{x}} = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{\epsilon} \end{bmatrix}$.

(d) Konditionstalet ges av $\kappa(A) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\epsilon}$. Detta blir stort om ϵ är litet, vilket ger ett illa konditionerat problem, så små avrundningsfel i $\mathbf{b}$ kan ge stora fel i $\hat{\mathbf{x}}$.

(e) Trunkerad SVD ger approximationen $\hat{\mathbf{x}} = v_1\sigma_1^{-1}u_1^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.