MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag

Hjälpmedel: alla
Datum: 2020-06-01 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

TMA672/TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2020 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Samma detaljnivå på lösningar som på en vanlig salstenta förväntas.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^5$ med $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ och låt

$$A = 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \mathbf{v}\mathbf{v}^T - I.$$

(a) Bestäm dimensionen av $(\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$. (1p)

(b) Bestäm alla egenvärden till A och ange geometrisk multiplicitet för varje egenvärde. (Tips: Hur verkar A på väl valda vektorer?) (3p)

(c) Är A diagonaliserbar? Motivering krävs. (1p)

(d) Utgör $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^5$? Varför/varför inte? (2p)

(e) Beskriv det affina rummet av lösningar till $\mathbf{x} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}$. (1p)

Lösning:

(a) Då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala är de också linjärt oberoende så $\dim(\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}) = 2$. I $\mathbb{R}^5$ får vi $\dim((\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp) = 5 - 2 = 3$. **Svar:** 3

(b) Vi får $A\mathbf{u} = 2\mathbf{u}\|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{u} = 7\mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = 2\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{v} = 8\mathbf{v}$. För $\mathbf{w} \in (\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$ får vi $A\mathbf{w} = 2\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) + \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) - \mathbf{w} = -\mathbf{w}$.
Egenrummen blir $E(7) = \text{Span}\,\mathbf{u}$, $E(8) = \text{Span}\,\mathbf{v}$ och $E(-1) = (\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$, de har därför dimension 1, 1 respektive 3.
Svar: $\lambda_1 = -1$ med multiplicitet 3, $\lambda_2 = 7$ med multiplicitet 1 och $\lambda_3 = 8$ med multiplicitet 1.

(c) Ja. Matrisen är symmetrisk och spektralsatsen ger att alla symmetriska matriser är diagonaliserbara. Alternativt ser vi från (b) uppgiften att summan av geometriska multipliciteten för egenvärdena är $5 = \dim(\mathbb{R}^5)$ så inget egenvärde är defekt. Därför är matrisen diagonaliserbar.

(d) Nej, A är inte positivt definit. T. ex. får vi $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = -\|\mathbf{w}\|^2 < 0$ för alla nollskilda vektorer $\mathbf{w} \in (\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$.

(e) Ansatsen $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u}$ ger $\mathbf{x} + A\mathbf{x} = 8\alpha\mathbf{u}$, så $\mathbf{x} = \mathbf{u}/8$ är en partikulärlösning. De homogena lösningarna måste uppfylla $(2\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = 0$, dvs $(\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$.
Svar: $\mathbf{u}/8 + (\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$.

2. Betrakta begynnelsevärdesproblemet som ges av följande differentialekvation

$$x''(t) = -4x'(t) - 3x(t)$$

med begynnelsevillkor $x(0) = 1$ och $x'(0) = 1$.

(a) Formulera om problemet som ett första ordnings system. (1p)

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet med hjälp av diagonalisering. (4p)

(c) Använd diagonaliseringen från (b) uppgiften för att beräkna vad Eulers framåt-metod ger efter k iterationer med steglängd h. (3p)

(d) För vilka reella steglängder h är Eulers framåt-metod stabil. (1p)

Lösning:

(a) Låt $y_1 = x$ och $y_2 = x'$, så $y_1' = x' = y_2$ och $y_2' = x'' = -4x' - 3x = -4y_2 - 3y_1$. På matrisform får vi $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -3$ och $\lambda_2 = -1$.
Egenvektorer till $\lambda_1 = -3$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = TDT^{-1}$ med $T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = T^{-1}\mathbf{y}(t)$. Då får vi $\mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t)$, dvs $\begin{cases} z_1'(t) = -3z_1(t) \\ z_2'(t) = -z_2(t) \end{cases}$.

De allmänna lösningarna är $\begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{-3t} \\ z_2(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$.

c_1 och c_2 bestäms av $T\mathbf{z}(0) = \mathbf{y}(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -2$.
Lösningarna uttryckt i $\mathbf{y}$ blir

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-3t} + 2e^{-t} \\ 3e^{-3t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Svar: $x(t) = y_1(t) = -e^{-3t} + 2e^{-t}$.

(c) Eulers framåtmetod ger $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} + hA\mathbf{y}^{(k)} = (I + hA)\mathbf{y}^{(k)}$, där $\mathbf{y}^{(k)}$ är lösningen efter steg k. Efter k iterationer får vi $\mathbf{y}^{(k)} = (I+hA)^k\mathbf{y}^{(0)} = (TT^{-1}+hTDT^{-1})^k\mathbf{y}^{(0)} = T(I + hD)^k T^{-1}\mathbf{y}^{(0)}$. Från (b) har vi att $T^{-1}\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(k)} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-3h)^k & 0 \\ 0 & (1-h)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-3h)^k \\ -2(1-h)^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(1-3h)^k + 2(1-h)^k \\ 3(1-3h)^k - 2(1-h)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) Vi ser att lösningen divergerar om $|1 - 3h| > 1$ eller $|1 - h| > 1$, men annars håller sig lösningen ändlig. Mest begränsande är $|1 - 3h| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 1 - 3h \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -3h \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 3h \le 2$. Svar: $0 \le h \le 2/3$.

3. Låt $\mathbf{e} = \{e^t, te^t, t^2e^t, t^3e^t\}$, $V = \text{Span}\{\mathbf{e}\}$ och definiera den linjära avbildningen $G : V \to V$ genom

$$G(f) = (t-1)f'(t) - tf(t)$$

(a) Bestäm matrisen för G i basen $\mathbf{e}$. (3p)

(b) Bestäm en bas för lösningarna till $(t-1)f'(t) - tf(t) = 0$ i rummet V. (1p)

(c) Använd resultatet i (a) uppgiften för att hitta en partikulärlösning till

$$(t-1)f'(t) - tf(t) = (t^3 - 3t)e^t.$$

(2p)

Lösning:

(a) Derivering ger

$$\begin{aligned}
G(e^t) &= (t-1)e^t - te^t = -e^t,\\
G(te^t) &= (t-1)(e^t + te^t) - e^t t^2 = -e^t,\\
G(t^2e^t) &= (t-1)(2te^t + t^2e^t) - t^3e^t = -2te^t + t^2e^t,\\
G(t^3e^t) &= (t-1)(3t^2e^t + t^3e^t) - t^4e^t = -3t^2e^t + 2t^3e^t.
\end{aligned}$$

Så matrisen för G i basen $\mathbf{e}$ blir

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) De homogena lösningarna motsvarar $N(A)$. Matrisen har redan trappstegsform så lösningarna till $A\mathbf{x} = 0$ spänns upp av $[1, -1, 0, 0]^T$ som motsvarar $e^t - te^t$.
Svar: $\{(1-t)e^t\}$ utgör en bas för lösningsrummet.

(c) Högerledet motsvarar $\mathbf{b} = [0, -3, 0, 1]^T$ så vi behöver lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Vi kan välja $s = 0$ för att få partikulärlösningen $\frac{3}{2}t^2e^t + \frac{1}{2}t^3e^t$. **Svar:** $\frac{1}{2}(3+t)t^2e^t$.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Använd Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess för att konstruera en kompakt QR-faktorisering av A. (4p)

(b) Använd QR-faktoriseringen för att bestämma minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

(c) Varför är det bättre att använda QR faktorisering istället för normalekvationerna när man löser minstakvadratproblem numeriskt? (1p)

Lösning:

(a) Låt $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$. Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \|\mathbf{u}_1\| = 3, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-9}{3^2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{u}_2\| = 6, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3^2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{3^2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\|\mathbf{u}_3\| = 1, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Då är $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ en ON bas för $V(A)$.

$$Q_1 = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Med $r_{jj} = \|u_j\|$ och $r_{ij} = (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ för $i \leq j$ får vi $A = Q_1 R$ med

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minstakvadratlösning som ges av $R\mathbf{x} = Q_1^T\mathbf{b}$, dvs

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Konditionstalet $\kappa(A^TA) = \kappa(A)^2 = \kappa(R)^2$, så normalekvationerna har ofta mycket större konditionstal vilket gör att numeriska fel förstärks kraftigt. QR-metoden ger mycket lägre konditionstal.

5. En funktion är given av

x	0.6	0.8	1.0	1.3	1.6
$f(x)$	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7

med funktionsvärden avrundade till en decimal. Det är dessutom känt att $|f^{(3)}(x)| < 1$ för $x \in [0.6, 1.6]$ och $|f^{(4)}(x)| < 1$ för $x \in [0.6, 1.6]$.

(a) Konstruera en differensapproximation till $f'(x)$ som bara använder funktionsvärdena $f(x-2h)$, $f(x)$, $f(x+3h)$ och har trunkeringsfel $\mathcal{O}(h^2)$. (4p)

(b) Använd differensapproximationen från (a) uppgiften för att bestämma $f'(1)$ så noga som möjligt och gör en feluppskattning som även inkluderar avrundningsfel. (3p)

(c) Approximera $\int_{0.6}^{1.6} f(x)dx$ med hjälp av Simpsons regel på lämpliga delintervall och uppskatta trunkeringsfelet. (3p)

(d) Förklara varför det i regel är en dålig idé att integrera ett polynom som interpolerar alla givna punkter istället för metoden i (c) uppgiften. (1p)

VÄND!

Lösning:

(a) Gör en ansats för differensapproximationen

$$F(x,h) = \frac{c_1 f(x-2h) + c_2 f(x) + c_3 f(x+3h)}{h}.$$

Taylorutveckling kring $h = 0$ ger

$$\begin{aligned} F(x,h) = & \frac{(c_1+c_2+c_3)f(x)}{h} + (-2c_1+3c_3)f'(x) + \tfrac{1}{2}(4c_1+9c_3)hf''(x) \\ & + \tfrac{1}{6}(-8c_1+27c_3)h^2 f^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \tag{1}$$

Villkoret $F(x,h) = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$ ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/10 \\ 1/6 \\ 2/15 \end{bmatrix}$$

Detta ger differensapproximationen

$$F(x,h) = \frac{-\frac{3}{10}f(x-2h) + \frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{15}f(x+3h)}{h},$$

$$f'(x) = F(x,h) - f^{(3)}(x)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

(b) Vi har två möjliga val $h = 0.1$ och $h = 0.2$ som ger

$$F(1,0.1) = 10\big(-\tfrac{3}{10}f(0.8) + \tfrac{1}{6}f(1.0) + \tfrac{2}{15}f(1.3)\big) \approx 0.733333,$$
$$F(1,0.2) = 5\big(-\tfrac{3}{10}f(0.6) + \tfrac{1}{6}f(1.0) + \tfrac{2}{15}f(1.6)\big) \approx 0.583333.$$

Avrundningsfelen i funktionsvärdena ger $|\delta f| \leq 0.05$. Detta ger fel i differensapproximationen

$$|R_f| \leq \frac{\frac{3}{10}|\delta f| + \frac{1}{6}|\delta f| + \frac{2}{15}|\delta f|}{h} \leq \frac{0.03}{h}.$$

För $h = 0.1$ får vi $|R_f| \leq 0.3$ och för $h = 0.2$ får vi $|R_f| \leq 0.15$. För trunkeringsfelet försummar vi $\mathcal{O}(h^3)$ termen och får

$$|R_T| \lesssim |f^{(3)}(x)|h^2 \leq h^2$$

För $h = 0.1$ får vi $|R_T| \lesssim 0.01$ och för $h = 0.2$ får vi $|R_T| \lesssim 0.04$. Trots att trunkeringsfelet blir mycket mindre för $h = 0.1$ så ser vi att felet domineras av $|R_f|$.
Svar: $h = 0.2$ ger bäst resultat $f'(1) \approx 0.58$ med $|R_f| + |R_T| \leq 0.2$.

(c) Simpsons regel med feluppskattning ger att det finns ett $\xi \in [a,b]$ så att

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5.$$

Tillämpat på de två delintervallen $[0.6, 1.0]$ och $[1.0, 1.6]$ får vi

$$\int_{0.6}^{1.0} f(t)dt \approx \frac{0.4}{6}\big(f(0.6) + 4f(0.8) + f(1.0)\big) \approx 0.526667,$$

$$\text{med } |R_T| \leq \frac{0.4^5}{2880}|f^{(4)}(\xi)| \leq 3.55556 \cdot 10^{-6},$$

$$\int_{1.0}^{1.6} f(t)dt \approx \frac{0.6}{6}\big(f(1.0) + 4f(1.3) + f(1.6)\big) = 0.96,$$

$$\text{med } |R_T| \leq \frac{0.6^5}{2880}|f^{(4)}(\xi)| \leq 2.7 \cdot 10^{-5}$$

Summerar vi får vi $\int_{0.6}^{1.6} f(x)dx \approx 1.486666\ldots$ med trunkeringsfel $|R_T| \leq 3.1 \cdot 10^{-5}$. (Avrundningsfelen är dock större $|R_f| \leq 0.025$, men de efterfrågades inte i den här deluppgiften.)

(d) Ökar vi antalet interpolationspunkter blir i regel interpolationsfelet större mellan interpolationspunkterna (Runges fenomen). Därmed kommer även approximationen av integralen avvika mer. Detta undviks genom att hålla gradtalet lågt och dela upp integralen på fler intervall.

6. Låt $A = LU$ vara en LU-faktorisering med L ospecificerad och

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för $N(A^T)^\perp$. Ditt svar får innehålla matrisen L. (2p)

(b) Beräkna $\det(AA^T)$. Ditt svar ska vara ett tal. (3p)

Lösning:

(a) Satsen om de fyra fundamentala underrummen ger $N(A^T)^\perp = V(A)$. En bas för A ges a de kolonner i A som motsvarar pivot-kolonner i U, dvs kolonn 1, 2 och 4. På grund av faktoriseringen ges dessa kolonner av

$$\left\{ L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dessa vektorer utgör således en bas för $N(A^T)^\perp$.

(b) L är kvadratisk och triangulär med ettor på diagonalen så $\det(L) = 1$.

$$\begin{aligned} \det(AA^T) &= \det(LU(LU)^T) = \det(LUU^T L^T) = \det(L)\det(UU^T)\det(L^T) = \det(UU^T) \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24. \end{aligned}$$

OBS! U är inte kvadratisk och saknar därför determinant, men UU^T är kvadratisk.
Svar: $\det(AA^T) = 24$.

7. (a) Låt $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_1^2 + \frac{\pi}{2}x_2 + x_2^2 - 2x_2 \arctan x_1$. Vi söker $\min f(\mathbf{x})$ då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Utför en iteration med Newtons metod för minimering med steglängd $\alpha = 1$ och startpunkt $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$. (4p)

(b) Man söker minimum x^* till en unimodal funktion $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ med hjälp av Gyllene snitt metoden. Hur många funktionsberäkningar behöver göras för att stänga in x^* i ett intervall med längd mindre än 10^{-3}? (2p)

Lösning:

(a) Newtons metod for minimering innebär att vi söker en rot till $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ med hjälp av Newtons metod för rotsökning. Till detta behöver vi gradienten och Jacobianen av gradienten, dvs Hessianen.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -3 + 2x_1 - \dfrac{2x_2}{1 + x_1^2} \\ \dfrac{\pi}{2} + 2x_2 - 2\arctan x_1 \end{bmatrix}, \quad H(\mathbf{x}) = J(\nabla f)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 + \dfrac{4x_1x_2}{(1 + x_1^2)^2} & -\dfrac{2}{1 + x_1^2} \\ -\dfrac{2}{1 + x_1^2} & 2 \end{bmatrix}.$$

I startpunkten $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$ har vi

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad H(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

För Newton iterationen löser vi $H(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(0)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \mathbf{s}^{(0)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)} = [7/5, 1/5]^T$.

(b) Efter varje iteration med Gyllene snitt metoden multipliceras intervall-längden med $\tau = (\sqrt{5}-1)/2$ så efter k iterationer får vi intervall längd $I_k = 2\tau^k$. Vi söker k så att $I_k < 10^{-3} \Rightarrow 2\tau^k < 10^{-3} \Rightarrow k\log_{10}(\tau) + \log_{10}(2) < -3$. Då $\tau < 1$ blir $\log_{10}(\tau) < 0$, så vårt villkor kan skrivas $k > (-3 - \log_{10}(2))/\log_{10}(\tau) \approx 15.8$. Så vi behöver 16 iterationer. Varje iteration kräver en extra funktionsberäkning, men första iterationen kräver 2. **Svar:** 17 funktionsberäkningar krävs.

8. En 5×4 matris A har en full singulärvärdesfaktorisering $A = U\Sigma V^T$ med

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och låt $\mathbf{u}_k$ och $\mathbf{v}_k$ beteckna kolonn k i U respektive V.

(a) Bestäm rangen av matrisen A. (1p)

(b) Vad blir $A\mathbf{v}_k$ för $k = 1, 2, 3, 4$? (1p)

(c) Bestäm (det effektiva) konditionstalet $\kappa(A)$ med avseende på 2-normen.
Kan detta förbättras med hjälp av en liten modifiering av A och i så fall hur?
Ge ett mått på hur stor skillnaden mellan matriserna är. (3p)

(d) Bestäm den mistakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $\mathbf{b} = \mathbf{u}_1 + \epsilon\mathbf{u}_3$ och $\epsilon \in \mathbb{R}$ som har minst $\|\mathbf{x}\|$.
Upprepa med din matris från (c) uppgiften och kommentera. (3p)

Lösning:

(a) Från Σ ser man att antalet nollskilda singulära värden är 3, så rangen av A är 3.

(b) Låt σ_i vara diagonalelementen i Σ, dvs $\sigma_1 = 10^2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 10^{-14}$, $\sigma_4 = 0$.
Utför man matrismultiplikationerna får man

$$A = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

Mängden $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^4$ är en ON-mängd så vi får $A\mathbf{v}_j = \sigma_j\mathbf{u}_j$.
Svar: $A\mathbf{v}_1 = 10^2\mathbf{u}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$, $A\mathbf{v}_3 = 10^{-14}\mathbf{u}_3$ och $A\mathbf{v}_4 = 0$

(c) Konditionstalet ges av $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} = \frac{10^2}{10^{-14}} = 10^{16}$, så matrisen är illa konditionerad. Vi kan modifiera A genom att sätta $\sigma_3 = 0$. Vi får då en matris A_2 med rang 2 och $\kappa(A_2) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 10^2$. Den är mycket bättre konditionerad. Skillnaden mellan matriserna är liten ty $\|A - A_2\|_2 = \|\sigma_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T\|_2$ som ges av roten ur största egenvärdet till $(\sigma_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T)^T\sigma_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T = \sigma_3^2\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T = \sigma_3^2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T$. Det egenvärdet är σ_3^2 så $\|A - A_2\|_2 = \sigma_3 = 10^{-14}$.

(d) Minstakvadratlösning med minst $\|\mathbf{x}\|$ ges av $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r}\mathbf{v}_i\sigma_i^{-1}\mathbf{u}_i^T\mathbf{b}$. För matrisen A får vi därför $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1\sigma_1^{-1}\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 + \epsilon\mathbf{v}_3\sigma_3^{-1}\mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 10^{-2} + \epsilon\mathbf{v}_3 10^{14}$ på grund av att $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^3$ är en ON-mängd. Vi ser att även ett litet ϵ kan ge en stor skillnad i $\mathbf{x}$. För matrisen A_2 får vi istället $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1\sigma_1^{-1}\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 10^{-2}$, så störningen $\epsilon\mathbf{u}_3$ påverkar inte. Detta ger samma bild som konditionstalen. Genom att en liten förändring av matrisen blir beräkningen mycket mindre känslig för avrundingsfel i högerledet.