TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2019 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.
Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Visa att $N(A^T) = V(A)^\perp$ för godtyckliga $m \times n$ matriser A. (3p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (3p)

(c) Använd (a) uppgiften för att verifiera att residualen i (b) uppgiften är ortogonal mot kolonnrummet $V(A)$. (1p)

2. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ för $1 \le x \le 4$. Låt $p(x)$ vara interpolationspolynomet som interpolerar f i punkterna $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$.

(a) Bestäm interpolationspolynomet $p(x)$. (2p)

(b) Generellt gäller för interpolationsfelet att

$$p_n(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

där ξ ligger någonstans mellan $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$. Använd detta tillsammans med lämplig skattning av $f^{(n+1)}(\xi)$ för att uppskatta interpolationsfelet i $x = 3$ och jämför med exakt $|p_n(3) - f(3)|$. (2p)

(c) Vad innebär Runges fenomen? (1p)

(d) Uppskatta $\int_1^4 f(x)dx$ med trapetsmetoden. Utnyttja endast funktionsvärdena i $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$. (2p)

3. Betrakta ekvationen $0 = f(x) = \ln(x) - 3x + 4$.

(a) Visa att ekvationen har exakt en rot på intervallet $(1, 2)$. (2p)

(b) Utför en iteration med Newtons metod med initialvärde $x_0 = 1$. (2p)

(c) Som alternativ till Newtons metod kan man tänka sig att skriva om problemet som $x = g_1(x) = \dfrac{4 + \ln(x)}{3}$ eller $x = g_2(x) = \exp(3x - 4)$ och använda sig av fixpunktsiteration. Vilken av funktionerna g_1 eller g_2 är lämpligast? Motivera väl. (2p)

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ och låt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden till A och baser för motsvarande egenrum.
(Tips egenvärdena är positiva heltal. Determinantberäkningen kan eventuellt förenklas genom att summera raderna.) (3p)

(b) Utför en ortogonal diagonalisering av A, dvs diagonalisera med hjälp av en ortogonalmatris. (2p)

(c) Visa att $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ utgör en skalärprodukt på $\mathbb{R}^3$. (2p)

(d) Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ med avseende på skalärprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.
(Tips använd gärna resultatet i (b)) (2p)

5. Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$ utan bivillkor.

(a) Newtons metod ger en sökriktning $\mathbf{d}$ i punkten $\hat{\mathbf{x}} = (0\ 1)^T$. Bestäm $\mathbf{d}$. (3p)

(b) Avgör ifall $\mathbf{d}$ är en avtaganderiktning (descentriktning). (1p)

(c) Utför en iteration linjesökning med Newtons metod i riktningen $\mathbf{d}$ med start i $\hat{\mathbf{x}}$. (2p)

(d) Visa att steglängden i (c) uppgiften är oberoende av f och startpunkten $\hat{\mathbf{x}}$ så länge f är deriverbar tillräckligt många gånger och Hessianen är inverterbar i $\hat{\mathbf{x}}$. (3p)

6. Betrakta begynnelsevärdesproblemet som ges av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -x_1(t) \\ x_2'(t) = & 9x_1(t) \quad - \quad 10x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

(a) Bestäm en exakt lösning till begynnelsevärdesproblemet. (4p)

(b) Avgör ifall problemet är asymptotiskt stabilt. (1p)

(c) Utför två iterationer med Eulers framåtmetod med steglängd h. (2p)

(d) För vilka reella steglängder h är Eulers framåtmetod stabil. (2p)

7. (a) Cauchy-Schwarz olikhet säger att $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ med likhet om och endast om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är linjärt beroende. Utgående från detta bevisa triangelolikheten och ange när likhet gäller. (3p)

(b) Antag att A är en inverterbar matris. Beskriv en singulärvärdesfaktorisering (SVD) av A^{-1} uttryckt i de ingående matriserna i en singulärvärdesfaktorisering av A. Beskriv de singulära värdena för A^{-1} uttryckt i de singulära värdena för A. (3p)

8. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, där $0 < c < 1$ är en parameter.

(a) Bestäm en LU-faktorisering utan pivotering av matrisen A. (1p)

(b) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen A. (1p)

(c) Bestäm konditionstalet för L matriserna från (a) och (b) uppgifterna med avseende på matrisnormen $\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ och förklara varför pivotering är viktigt. (3p)

(d) Förklara hur LU-faktorisering kan användas för att lösa ekvationssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där A är en $n \times n$ matris och ange en fördel jämfört med Gauss-elimination. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2019-08-29 kl. 08.30–12.30
Examinator: Thomas Bäckdahl | Telefonvakt: Olof Elias
Lösningsförslag | ankn 5325

TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2019 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.
Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Visa att $N(A^T) = V(A)^\perp$ för godtyckliga $m \times n$ matriser A. (3p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (3p)

(c) Använd (a) uppgiften för att verifiera att residualen i (b) uppgiften är ortogonal mot kolonnrummet $V(A)$. (1p)

Lösning:

(a) $\mathbf{x} \in N(A^T) \Leftrightarrow A^T\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}$ ortogonal mot raderna i $A^T \Leftrightarrow \mathbf{x}$ ortogonal mot kolonnerna i $A \Leftrightarrow \mathbf{x}$ ortogonal mot rummet som genereras av kolonnerna i A dvs $V(A) \Leftrightarrow \mathbf{x} \in V(A)^\perp$.

(b) Minstakvadratlösningen löser normalekvationerna $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi har $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\det(A^TA) = 2$ så $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Detta ger minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Residualen $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. $A^T\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{r} \in N(A^T) = V(A)^\perp$.

2. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ för $1 \le x \le 4$. Låt $p(x)$ vara interpolationspolynomet som interpolerar f i punkterna $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$.

(a) Bestäm interpolationspolynomet $p(x)$. (2p)

(b) Generellt gäller för interpolationsfelet att

$$p_n(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

där ξ ligger någonstans mellan $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$. Använd detta tillsammans med lämplig skattning av $f^{(n+1)}(\xi)$ för att uppskatta interpolationsfelet i $x = 3$ och jämför med exakt $|p_n(3) - f(3)|$. (2p)

(c) Vad innebär Runges fenomen? (1p)

(d) Uppskatta $\int_1^4 f(x)dx$ med trapetsmetoden. Utnyttja endast funktionsvärdena i $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$. (2p)

Lösning:

(a) Vi har 3 punkter så vi behöver ett andragradspolynom. Newtons form är $p(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2)$. Interpolationsvillkoren ger

$$\begin{aligned} 4 &= f(1) = p(1) = c_0 \\ 1 &= f(2) = p(2) = c_0 + c_1(2-1) \\ \tfrac{1}{4} &= f(4) = p(4) = c_0 + c_1(4-1) + c_2(4-1)(4-2) \end{aligned}$$

Detta ger $c_0 = 4$, $c_1 = -3$, $c_2 = 7/8$, så interpolationspolynomet blir $p(x) = 4 - 3(x-1) + \frac{7}{8}(x-1)(x-2)$.

(b) För vårt fall får vi

$$p_2(x) - f(x) = -\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)(x-2)(x-4).$$

Derivatorna blir $f^{(1)}(x) = -8x^{-3}, f^{(2)}(x) = 24x^{-4}, f^{(3)}(x) = -96x^{-5}$ som är avtagande på intervallet. Därför får vi $|f^{(3)}(x)| \leq 96$ vilket ger $|p_2(3) - f(3)| = \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!}|(3-1)(3-2)(3-4)| \leq \frac{96}{6}2 = 32$. Riktiga felet blir $|p_2(3) - f(3)| = |-\frac{1}{4} - \frac{4}{9}| = \frac{25}{36} < 1$. Alltså ger feluppskattningsformeln en ganska grov överskattning av felet.

(c) Runges fenomen innebär att interpolationsfelet mellan interpolationspunkterna kan bli stort framförallt nära ändpunkterna. Felet blir större ju högre gradtal man väljer. Problemet kan motverkas genom att hålla gradtalet lågt och fördela interpolationspunkterna tätare nära ändpunkterna.

(d) Trapetsregeln $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ på de två delintervallen ger

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(2)) + \frac{2}{2}(f(2) + f(4)) = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$$

3. Betrakta ekvationen $0 = f(x) = \ln(x) - 3x + 4$.

(a) Visa att ekvationen har exakt en rot på intervallet $(1, 2)$. (2p)

(b) Utför en iteration med Newtons metod med initialvärde $x_0 = 1$. (2p)

(c) Som alternativ till Newtons metod kan man tänka sig att skriva om problemet som $x = g_1(x) = \dfrac{4 + \ln(x)}{3}$ eller $x = g_2(x) = \exp(3x - 4)$ och använda sig av fixpunktsiteration. Vilken av funktionerna g_1 eller g_2 är lämpligast? Motivera väl. (2p)

Lösning:

(a) Vi har att $f(1) = 1 > 0$ och $f(2) = \ln(2) - 2 < \ln(e) - 2 = -1 < 0$. Funktionen är kontinuerlig så satsen om mellanliggande värde ger att minst en rot existerar. Derivering ger $f'(x) = x^{-1} - 3$. Derivatan är en avtagande funktion så $f'(x) \leq f'(1) = -2$ för alla $1 \leq x \leq 2$, således är $f(x)$ strikt avtagande på intervallet och därmed är roten unik.

(b) Newtons metod ger $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Med $x_0 = 1$ får vi $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{-2} = \frac{3}{2}$.

(c) En fixpunktsiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ är lokalt konvergent mot en fixpunkt x^* om $|g(x^*)| < 1$. För våra funktioner får vi $g_1'(x) = \frac{1}{3x}$ och $g_2'(x) = 3exp(3x-4)$. Funktionen $g_1'(x)$ är avtagande på intervallet så $\frac{1}{6} = g_1'(2) \leq g_1'(x) \leq g_1'(1) = \frac{1}{3}$ för $1 \leq x \leq 2$ vilket ger lokal konvergens. Funktionen $g_2'(x)$ är växande på intervallet så $1 < \frac{3}{e} = g_2'(1) \leq g_2'(x) \leq g_2'(2) = 3e^2$ för $1 \leq x \leq 2$ vilket inte ger konvergens. Således måste vi välja g_1 för att få en konvergent metod.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ och låt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden till A och baser för motsvarande egenrum. (Tips egenvärdena är positiva heltal. Determinantberäkningen kan eventuellt förenklas genom att summera raderna.) (3p)

(b) Utför en ortogonal diagonalisering av A, dvs diagonalisera med hjälp av en ortogonalmatris. (2p)

(c) Visa att $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ utgör en skalärprodukt på $\mathbb{R}^3$. (2p)

(d) Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ med avseende på skalärprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. (Tips använd gärna resultatet i (b)) (2p)

Lösning:

(a) Karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \underset{①+②+③}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{②-① \\ ③+2①}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(8-\lambda).$$

Alltså är egenvärdena $\lambda_1 = 2$ med multiplicitet 2 och $\lambda_2 = 8$ med multiplicitet 1. Egenrummet till $\lambda_1 = 2$ är lösningarna till

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Så } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ är en bas för egenrummet} E(2).$$

Egenrummet till $\lambda_2 = 8$ är lösningarna till

$$(A-\lambda_2 I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Så $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ utgör en bas för egenrummet $E(8)$.

(b) Ortogonalisering ger att $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ utgör en ortogonal bas för egenrummet $E(2)$.

Egenrummen är automatiskt ortogonala för en symmetrisk matris, så vi behöver endast normera. De normerade vektorerna bildar kolonnerna i ortogonalmatrisen $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Diagonalmatrisen $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ som bildas av motsvarande egenvärden ger $A = QDQ^T$.

(c) Matrisen A är symmetrisk så $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = (\mathbf{x}^T A \mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_A$. Skalärprodukten är linjär i första argumentet: $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \alpha \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A$, $\langle \mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle_A = (\mathbf{x}+\mathbf{z})^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} + \mathbf{z}^T A \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle_A$. Skalärprodukten är en kvadratisk form. Positiva egenvärden ger att den är positivt definit vilket innebär $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_A \geq 0$ med likhet endast då $\mathbf{x} = 0$.

(d) Matrisen $Q^TAQ = D$ innehåller $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$-skalärprodukterna mellan alla kolonner i Q, så i den nya skalärprodukten är kolonnerna ortogonala, men har längder i kvadrat $\{2,2,8\}$. Normering ger att $\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$ utgör en ON-bas $\mathbb{R}^3$ med avseende på den nya skalärprodukten.

5. Betrakta problemet att minimera $f(x_1,x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + x_1x_2 + (1+x_2)^2$ utan bivillkor.

(a) Newtons metod ger en sökriktning $\mathbf{d}$ i punkten $\hat{\mathbf{x}} = (0\ 1)^T$. Bestäm $\mathbf{d}$. (3p)

(b) Avgör ifall $\mathbf{d}$ är en avtaganderiktning (descentriktning). (1p)

(c) Utför en iteration linjesökning med Newtons metod i riktningen $\mathbf{d}$ med start i $\hat{\mathbf{x}}$. (2p)

(d) Visa att steglängden i (c) uppgiften är oberoende av f och startpunkten $\hat{\mathbf{x}}$ så länge f är deriverbar tillräckligt många gånger och Hessianen är inverterbar i $\hat{\mathbf{x}}$. (3p)

Lösning:

(a)

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 \\ x_1 + 2(1+x_2)\end{pmatrix}, \qquad H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\end{pmatrix}, \qquad H(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

Newton riktningen är $\mathbf{d} = -H(\hat{\mathbf{x}})^{-1}\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

(b) Den är en avtaganderikting ty $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})^T\mathbf{d}_N = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = -6 < 0$.

(c) Låt $g(\alpha) = f(\hat{\mathbf{x}} + \alpha\mathbf{d}) = f(-2\alpha, 1-\alpha) = \frac{1}{4}(-2\alpha)^4 - 2\alpha(1-\alpha) + (2-\alpha)^2 = 4\alpha^4 + 3\alpha^2 - 6\alpha + 4$. $g'(\alpha) = 16\alpha^3 + 6\alpha - 6$, $g''(\alpha) = 48\alpha^2 + 6$. Linjesökning med Newtons metod med start i $\alpha_0 = 0$ ger $\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{g'(\alpha_0)}{g''(\alpha_0)} = -\frac{-6}{6} = 1$. Så den nya punkten blir $\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d} = (-2\ \ 0)^T$.

(d) Generellt har vi Taylorutvecklingarna

$$g(\alpha) = f(\hat{\mathbf{x}} + \alpha\mathbf{d}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha\mathbf{d}^T\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\alpha^2}{2}\mathbf{d}^TH(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha^3),$$
$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + \frac{\alpha^2}{2}g''(0) + \mathcal{O}(\alpha^3).$$

Så $g'(0) = \mathbf{d}^T\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$ och $g''(0) = \mathbf{d}^TH(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{d}$. Newton sökriktningen ger $H(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{d} = -\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$ så $g''(0) = \mathbf{d}^TH(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{d} = -\mathbf{d}^T\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = -g'(0)$. Därför blir $\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{g'(\alpha_0)}{g''(\alpha_0)} = 1$.

6. Betrakta begynnelsevärdesproblemet som ges av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -x_1(t) \\ x_2'(t) = & 9x_1(t) & - & 10x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

(a) Bestäm en exakt lösning till begynnelsevärdesproblemet. (4p)

(b) Avgör ifall problemet är asymptotiskt stabilt. (1p)

(c) Utför två iterationer med Eulers framåtmetod med steglängd h. (2p)

(d) För vilka reella steglängder h är Eulers framåtmetod stabil. (2p)

Lösning:

(a) Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -10 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 9 & -10-\lambda \end{vmatrix} =$ $(-1-\lambda)(-10-\lambda)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -10$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer till $\lambda_1 = -10$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = TDT^{-1}$ med $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = -10y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) \end{cases}$.

De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-10t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$.

c_1 och c_2 bestäms av $T\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1$.

Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-10t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-10t} \end{bmatrix}.$$

(b) Båda egenvärdena är negativa så problemet är asymptotiskt stabilt. Alla lösningar konvergerar mot $(0\ 0)^T$ då $t \to \infty$.

(c) Eulers framåtmetod ger $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + hA\mathbf{x}^{(k)} = (I + hA)\mathbf{x}^{(k)}$, där $\mathbf{x}^{(k)}$ är lösningen efter steg k. Efter k iterationer får vi $\mathbf{x}^{(k)} = (I+hA)^k\mathbf{x}^{(0)} = (TT^{-1}+hTDT^{-1})^k\mathbf{x}^{(0)} =$ $T(I + hD)^k T^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$. Från (a) har vi att $T^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-10h)^k & 0 \\ 0 & (1-h)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1-10h)^k \\ (1-h)^k \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (1-h)^k \\ (1-h)^k - (1-10h)^k \end{bmatrix}, \text{ speciellt } \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} (1-h)^2 \\ (1-h)^2 - (1-10h)^2 \end{bmatrix}$$

(d) Vi ser att lösningen divergerar om $|1 - 10h| > 1$ eller $|1 - h| > 1$, men annars håller sig lösningen ändlig. Mest begränsande är $|1-10h| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 1-10h \le 1 \Leftrightarrow -2 \le$ $-10h \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 10h \le 2$. Svar: $0 \le h \le 2/10$.

7. (a) Cauchy-Schwarz olikhet säger att $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ med likhet om och endast om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är linjärt beroende. Utgående från detta bevisa triangelolikheten och ange när likhet gäller. (3p)

(b) Antag att A är en inverterbar matris. Beskriv en singulärvärdesfaktorisering (SVD) av A^{-1} uttryckt i de ingående matriserna i en singulärvärdesfaktorisering av A. Beskriv de singulära värdena för A^{-1} uttryckt i de singulära värdena för A. (3p)

Lösning:

VÄND!

(a) Se sats 2.2 sid 62 i Linjär algebra boken.

(b) En singulärvärdesfaktorisering av A ges av $A = U\Sigma V^T$ där U och V är ortogonala matriser och Σ är diagonal. Då A är inverterbar måste A vara kvadratisk och därmed även U, Σ och V kvadratiska av samma storlek. $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ ty $A^{-1}A = V\Sigma^{-1}U^TU\Sigma V^T = V\Sigma^{-1}\Sigma V^T = VV^T = I$. Diagonalen av Σ innehåller A matrisens singulära värden $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Diagonalen av Σ^{-1} innehåller A^{-1} matrisens singulära värden $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots$.

8. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, där $0 < c < 1$ är en parameter.

(a) Bestäm en LU-faktorisering utan pivotering av matrisen A. (1p)

(b) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen A. (1p)

(c) Bestäm konditionstalet för L matriserna från (a) och (b) uppgifterna med avseende på matrisnormen $\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ och förklara varför pivotering är viktigt. (3p)

(d) Förklara hur LU-faktorisering kan användas för att lösa ekvationssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där A är en $n \times n$ matris och ange en fördel jämfört med Gauss-elimination. (2p)

Lösning:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{②-\frac{1}{c}①}{\sim} \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 0 & 3-\frac{1}{c} & -\frac{2}{c} \end{bmatrix}$$

Svar: $A = L_aU_a$ med $L_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{bmatrix}$, $U_a = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 0 & 3-\frac{1}{c} & -\frac{2}{c} \end{bmatrix}$.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{①\leftrightarrow②}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ c & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{②-c①}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1-3c & 2 \end{bmatrix}$$

Svar: $PA = L_bU_b$ med $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $U_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-3c & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Konditionstalet med avseende på ∞-normen är $\kappa_\infty(L) = \|L\|_\infty\|L^{-1}\|_\infty$. $L_a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 1 \end{bmatrix}$ och $L_b^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$ så vi får $\kappa_\infty(L_a) = (\max\{1, 1+\frac{1}{c}\})^2 = (1+\frac{1}{c})^2$ och $\kappa_\infty(L_b) = (\max\{1, 1+c\})^2 = (1+c)^2$. För alla $0 < c < 1$ är $\kappa_\infty(L_a) > \kappa_\infty(L_b)$ så pivotering är att föredra. Framförallt om c är väldigt litet blir konditionstalet $\kappa_\infty(L_a)$ väldigt stort. Vid lösning av $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ har vi feluppskattningen $\frac{\|\delta\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty} \le \kappa_\infty(L)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$, detta ger försumbar felförstärkning för L_b men mycket stor felförstärkning för L_a. För att undvika detta är pivotering viktigt.

(d) Om man har en LU-faktorisering $PA = LU$ så kan man lösa systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genom en framåtsubstitution $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ följt av en bakåtsubstitution $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Detta innebär att för varje nytt högerled krävs $\mathcal{O}(n^2)$ flyttals operationer jämfört med $\mathcal{O}(n^3)$ som en Gauss-elimination kräver. LU-faktoriseringen i sig kräver dock lika många operationer som Gauss-eliminationen (utan högerled), så för bara ett högerled sparar man ingen tid. Har man många högerled kan man dock spara mycket tid.