MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2018**
Chalmers tekniska högskola **Datum: 2018-05-28 kl. 14.00 - 18.00**
Examinator: Håkon Hoel **Tel: ankn 5381**
Hjälpmedel: inga

TMA 671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.
Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället och granskning sker 2018-06-21 kl. 10-12 i rum MVL14, Chalmers tvärgata 3.

Obs ! Två små fel i tentan som gavs är rättad upp här i röd text.

---

1. Vi löser ekvationen $f(\boldsymbol{x}) = 0$ där $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är definierad som

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

(Fetstil $\boldsymbol{x}$ används här för vektorer i fall där det behövs att skilja i-te komponent av vektorn, dvs x_i, från i-te iteration av vektorn, dvs $\boldsymbol{x}_i$.) Vi önskar approximera roten $\hat{\boldsymbol{x}} = (\sqrt{1/3}, \sqrt{2/3})$.

a) Beräkna Jacobianen $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ till funktionen f, och iterera ett steg med Newtons metod med startapproximationen $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0.5)$. **(2p)**

Lösningsförslag:

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 4x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - J^{-1}(\boldsymbol{x}_0) f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 \\ 11/12 \end{bmatrix}.$$

■

b) Konstruera en fixpunktiterationsmetod $\boldsymbol{x}_{n+1} = g(\boldsymbol{x}_n)$ som konvergerar lokalt mot roten $\hat{\boldsymbol{x}}$. Iterera ett steg från startapproximationen $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0.5)$, och verifiera att din fixpunktmetod uppfyller villkoren för lokal konvergens. **(4p)**

Lösningsförslag: En möjlig funktion är

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_2^2/2} \\ \sqrt{1 - x_1^2} \end{bmatrix},$$

som ger iterationen

$$\boldsymbol{x}_1 = g(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 2^{-3/2} \\ \sqrt{3/4} \end{bmatrix}.$$

Jacobianen till g, dvs $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är på formen

$$G(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & x_2/(\sqrt{2}|x_2|) \\ -x_1/\sqrt{1 - x_1^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedan

$$G(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \implies \|G(\hat{\boldsymbol{x}})\|_\infty = 2^{-1/2} < 1,$$

vilket visar att metoden är lokalt konvergent. ■

2. Låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller

x	0	1/3	2/3	1
$f(x)$	1	2/3	0	1

,

och

$$\max_{y\in[0,1]} |f^{(4)}(y)| \leq 8. \tag{1}$$

a) Använd Newtons form till att bestämma det polynom p_3 av grad högst 3, dvs $p_3 \in \mathcal{P}_3$, som går genom $(x_i, f(x_i))_{i=0}^3$ där $x_i = i/3$. **(3p)**

Lösningsförslag: Newtons form $p_3(x) = c_1 + c_2x + c_3x(x - x_1) + c_4x(x - x_1)(x - x_2)$ och ekvationerna

$$p_3(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

leder till linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 2/9 & 0 \\ 1 & 1 & 2/3 & 2/9 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som man lösar med framåtsubstitution $c = (1, -1, -3/2, 9)$. ■

b) Approximera värdet till $f(5/6)$ och skatta approximationsfelet. **(2p)**

Det är känt att för $x \in [0, 1]$ så uppfyller interpolationspolynomet $p_3 \in \mathcal{P}_n$ följande:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

för någon $\xi(x) \in [0, 1]$.

Lösningsförslag:

$$f(5/6) \approx p_3(5/6) = 1 - 5/6 - 3/2(5/6)(5/6 - 1/3) + 9(5/6)(5/6 - 1/3)(5/6 - 2/3) = 1/6.$$

Från (1) följer det att

$$|p_3(5/6) - f(5/6)| \leq \frac{\max_{y\in[0,1]} |f^{(4)}(y)|}{4!}(5/6)(3/6)(1/6)(1/6) \leq \frac{5}{6^4}.$$

■

3. Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara en inverterbar matris med LUP-faktorisering $PA = LU$.

a) Beskriv kort egenskaperna till matriserna L, U och P (dvs matrisernas storlek och ytterligare ett adjektiv om varje matris). **(1p)**

Lösningsförslag: P, L och U är alla $n \times n$ matriser. L är nedåt triangulär med ettor på diagonalen, U är uppåt triangulär, och P är en permutationsmatris som beskriver/relaterar till alla radpivoteringar som gjorts i LUP-faktoriseringen. ■

b) Beskriv hur det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ kan lösas med LUP-faktorisering och ange beräkningskostnaden i antal flyttalsoperationer för att lösa $Ax = b$ med en redan LUP-faktoriserad matris A. **(2p)**

Tips: Beräkningskostnaden kan anges $\mathcal{O}(n^p)$ för någon $p \geq 1$.

Lösningsförslag: Ekvationssystemet $Ax = b$ kan lösas i två steg: 1. $Ly = Pb$ med framåtsubstitution, som kostar $\mathcal{O}(n^2)$ flops (och matris-vektormultiplikationen Pb kostar $\mathcal{O}(n)$ sedan P är en gles matris med n icke-noll element) och 2. Ux=y med bakåtsubstitution, som också kostar $\mathcal{O}(n^2)$ flops. Total beräkningskostnad blir $\mathcal{O}(n^2)$. ■

c) LU faktorisera följande matris (utan pivotering) **(3p)**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=L_1} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{=L_2} L_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{=U},$$

och

$$A = (L_2 L_1)^{-1} U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{=U}.$$

■

4. Vi betraktar matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Visa att A är inverterbar om och endast om 0 inte är ett egenvärde till A. **(2p)**

Lösningsförslag: Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vara egenvärdena till A. Egenskapen

$$\det(A) = \Pi_{j=1}^{n} \lambda_j$$

implicerar att

$$A \text{ är inverterbar} \iff \det(A) \neq 0 \iff \lambda_k \neq 0 \text{ för alla } 1 \leq k \leq n.$$

■

b) Visa att om matrisen A är similär med B och B är similär med C, så är A similär med C. **(2p)**

Lösningsförslag: Enligt uppgiften finns det inverterbara matriser D_1 och D_2 sådana att

$$A = D_1^{-1} B D_1 \qquad och B = D_2^{-1} C D_2.$$

Matrisen $D = D_2 D_1$ med invers $D_1^{-1} D_2^{-1}$ visar att A och C är similära:

$$A = D_1^{-1} D_2^{-1} C D_2 D_1.$$

■

c) Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas antisymmetrisk om $A^T = -A$. Visa att alla egenvärdena till en antisymmetrisk matris är imaginära (dvs $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ för alla egenvärden λ till A). **(3p)**

Lösningsförslag: Låt $\lambda \in \mathbb{C}$ vara ett egenvärde till A med egvenvektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Då är

$$\overline{x}^T A x = \overline{x}^T \lambda x = \lambda |x|^2,$$

och $\overline{x}^T A^T = \overline{(Ax)^T} = \overline{\lambda} \overline{x}^T$ implicerar att

$$\overline{x}^T A^T x = \overline{\lambda} |x|^2.$$

Sedan

$$\overline{x}^T A x + \overline{x}^T A^T x = (\lambda + \overline{\lambda}) |x|^2,$$

och

$$\overline{x}^T A x + \overline{x}^T A^T x = \overline{x}^T A x - \overline{x}^T A x = 0,$$

konkluderar vi att

$$\lambda + \overline{\lambda} = 0 \implies \mathrm{Re}(\lambda) = 0.$$

■

5. Vi betraktar linjära rummet $C[0,1]$ med skärprodukten

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(t)v(t)\,t\,dt, \qquad \forall u, v \in C[0,1],$$

och inducerade normen $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

a) Verifiera att $\langle\cdot,\cdot\rangle$ är en skalärprodukt. **(2p)**

Lösningsförslag: Egenskaperna $\langle u, v\rangle = \langle v, y\rangle$, $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ och bilinjaritet följer direkt. Det gör också

$$\langle u, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in C[0,1].$$

För att visa den återstående egenskapen, antag att $u \neq 0$. Sedan u är kontinuerlig finns det då en $x \in [0,1]$ och $\delta > 0$ så att $|u(y)| > \delta$ för alla $y \in B(x;\delta) := \{z \in [0,1] \mid |x - z| \leq \delta\}$. Det följer att

$$\langle u, u\rangle \geq \int_{B(x;\delta)} |u(t)|^2 t dt \geq \delta^2 \int_0^\delta t dt \geq \frac{\delta^4}{2} > 0.$$

Konklusion:

$$\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0.$$

$\blacksquare$

b) Låt $\mathcal{P}_k$ för $k \in \mathbb{N}$ beteckna linjära rummet av polynom av grad högst k och låt $\mathcal{B}_k = \{1, t, \ldots, t^k\}$ beteckna standardbasen för $\mathcal{P}_k$. Använd Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod till att bilda en ON-bas $\{e_1, e_2\}$ för $\mathcal{P}_1$ från vektorerna i basen $\mathcal{B}_1$. **(3p)**

Lösningsförslag:

$$u_1 = 1, \quad \|u_1\|^2 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \sqrt{2}.$$

$$u_2 = t - \langle t, e_1\rangle e_1 = t - 2/3, \quad \text{sedan} \quad \langle t, e_1\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

och

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 (t - 2/3)^2\,t\,dt = \frac{1}{36} \implies e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = 6t - 4.$$

$\blacksquare$

c) Bestäm polynomet $p(t) = at + b$ som minimerar integralen **(3p)**

$$\int_0^1 \left(p(t) - t^3\right)^2 t\,dt. \tag{2}$$

Lösningsförslag: Sedan $\mathcal{P}_1$ är ett underrum av $\mathcal{P}_3$ som spänns upp av ON-basen $\{e_1, e_2\}$ vet vi att

$$p := \langle t^3, e_1\rangle e_1 + \langle t^3, e_2\rangle e_2$$

minimerar integralen (2), sedan $p \in \mathcal{P}_1$ och $t^3 - p \in \mathcal{P}_1^\perp$. Från

$$\langle t^3, e_1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad \langle t^3, e_2\rangle = \int_0^1 6t^5 - 4t^4\,dt = \frac{1}{5},$$

får vi

$$p = \langle t^3, e_1\rangle e_1 + \langle t^3, e_2\rangle e_2 = \frac{2}{5} + \frac{6t-4}{5} = \frac{6t-2}{5}.$$

$\blacksquare$

d) Betrakta linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definierad som **(4p)**

$$F(p)(t) = \int_0^t sp''(s)ds + p'(t) + p(1).$$

Bestäm matrisen till F i basen $\mathcal{B}_2$ och beskriv $N(F)$ (dvs nollrummet till F).

Lösningsförslag:

$$A = \Big[F(1)\ F(t)\ F(t^2)\Big]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

var sista likhet följer från

$$F(1) = 1, \quad F(t) = 2, \quad F(t^2) = t^2 + 2t + 1.$$

Sedan

$$F(at^2 + bt + c) = 0 \iff A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

och

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies N(A) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

följer det att

$$N(F) = \operatorname{Span}(t-2).$$

■

6. Vi betraktar begynnelsevärdeproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} y, & t > 0 \\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

a) Beräkna den exakta lösningen $y(t)$. **(3p)**

Lösningsförslag: Matrisen $A = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = -5/2$ och $\lambda_2 = -1/2$ med respektive egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så den kan diagonaliseras $A = VDV^{-1}$ var $V = [v_1\, v_2]$ och $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Lösningen till differentialekvationen för $z = V^{-1}y$ leder till

$$y(t) = -\frac{1}{4} v_1 e^{-5t/2} + \frac{1}{4} v_2 e^{-t/2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{-5t/2} + e^{-t/2} \\ -e^{-5t/2} + e^{-t/2} \end{bmatrix}.$$

■

b) Iterera ett steg med Euler framåtmetoden och steglängden $h = 1/2$. **(2p)**

Lösningsförslag:

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad y_1 = y_0 + hAy_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

■

c) Beskriv varför den ordinära differentialekvationen (3) är (asymptotisk) stabil. **(1p)**

Lösningsförslag: Kort svar som ger 1p: Problemet är stabilt sedan realdelen till båda egenvärdena är strikt negativa och detta implicerar att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \quad \forall y(0) \in \mathbb{R}^2.$$

Mer utförlig: För varje $y(0) \in \mathbb{R}^2 = \text{Span}(v_1, v_2)$ finns ett entydigt par $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ så att vi kan skriva $y(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$, och lösningen till begynnelsevärdeproblemet tar formen

$$y(t) = c_1 v_1 e^{-5t/2} + c_2 v_2 e^{-t/2}.$$

Det följer att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{dvs} \quad \forall y(0) \in \mathbb{R}^2.$$

■

d) Bestäm om steglängden $h = 1/2$ ger en stabil lösning med Euler framåtmetoden. **(2p)**

Lösningsförslag: Euler framåtmetoden är stabil för steglängden $h > 0$ om

$$\max(|1 + h\lambda_1|, |1 + h\lambda_2|) \leq 1 \quad \text{dvs om} \quad \max(|1 - 5h/2|, |1 - h/2|) \leq 1.$$

För $h = 1/2$ är

$$\max(|1 - 5h/2|, |1 - h/2|) = 3/4.$$

Konklusion: metoden är stabil för $h = 1/2$. ■

7. Låt V vara reellt linjärt rum med en skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ och norm inducerad av skalärprodukten: $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

a) Bevisa Cauchy-Schwarz olikhet: **(5p)**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V,$$

med likhet om endast om u och v är linjärt beroende.

Lösningsförslag: Se bevis av Sats 2.1 i "Linjär algebra fortsätningskurs". ■

b) Två normer $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ och $|||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$, som inte nödvändigtvis är relaterade till någon skalärprodukt, sägs vara ekvivalenta om det finns konstanter $C > c > 0$ sådana att **(3p)**

$$c\|u\| \leq |||u||| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Betrakta rummet $\mathbb{R}^n$ och de två normerna

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Visa att normerna är ekvivalenta för godtyckligt fixt $n \in \mathbb{N}$ genom att verifiera följande olikheter:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Tips: Använd Cauchy-Schwarz olikhet.

Lösningsförslag: För alla $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right)^2 = \|x\|_1^2.$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger vidare att

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n}\|x\|_2.$$

■

8. Vi studerar egenskaper för reella linjära rum betecknad $(V, \oplus, \odot; \mathbb{R})$ där V är en icke-tom mängd, och $\oplus : V \times V \to V$ och $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ är rummets respektive operationer för addition och multiplikation med (reella) skalärer.

a) Låt 0_V beteckna nollelementet i $(V, \oplus, \odot; \mathbb{R})$. Visa att 0_V är ett entydigt element. **(2p)**

Tips: Man kan härleda en motsägelse.

Lösningsförslag: Antag att även $0'_V$ är ett nollelement. Då gäller att

$$0_V = 0'_V \oplus 0_V = 0'_V \implies 0_V = 0'_V.$$

■

b) Låt V vara mängden $\mathbb{R}^2$ och betrakta additionsoperationen **(4p)**

$$x \oplus_1 y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 - 2 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

och multiplikationsoperationen

$$\alpha \odot_1 x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}.$$

Visa att $(V, \oplus_1, \odot_1; \mathbb{R})$ inte ar ett linjärt rum genom att bestämma de två räknelagarna/axiomen som inte håller.

Lösningsförslag: För $\alpha \in \mathbb{R}$ och $x, y \in V$, så är

$$\alpha \odot_1 (x \oplus_1 y) = \alpha \odot_1 \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + y_1 - 1) \\ \alpha(x_2 + y_2 - 2) \end{bmatrix},$$

och

$$(\alpha \odot_1 x) \oplus_1 (\alpha \odot_1 y) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \oplus_1 \begin{bmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + y_1) - 1 \\ \alpha(x_2 + y_2) - 2 \end{bmatrix}.$$

Det följer att den distributiva lagen

$$\alpha \odot_1 (x \oplus_1 y) = (\alpha \odot_1 x) \oplus_1 (\alpha \odot_1 y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \& \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

inte håller (ta t ex $x = (1, 1)$, $y = (0, 1)$ och $\alpha = 2$).

På liknande sätt observerar vi att

$$(\alpha + \beta) \odot_1 x = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) x_1 \\ (\alpha + \beta) x_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad (\alpha \odot_1 x) \oplus_1 (\beta \odot_1 x) = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) x_1 - 1 \\ (\alpha + \beta) x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Det följer att den andra distributiva lagen

$$(\alpha + \beta) \odot_1 x = (\alpha \odot_1 x) \oplus_1 (\beta \odot_1 x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \& x \in \mathbb{R}^2,$$

inte håller (ta t ex $\alpha = \beta = 1$ och $x = (1, 1)$). ■

c) Betrakta mängden V, additionsoperationen $\oplus_1$ från ovan och den nya multiplikationsoperationen **(2p)**

$$\alpha \odot_2 x := \begin{bmatrix} \alpha(x_1 - 1) + 1 \\ \alpha(x_2 - 2) + 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm nollelementet 0_V till det linjära rummet $(V, \oplus_1, \odot_2; \mathbb{R})$ (man kan visa att detta är ett linjärt rum, men det är ej uppgiften här).

Lösningsförslag:

$0_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Det följer av

$$x \oplus_1 0_V = \begin{bmatrix} x_1 + 1 - 1 \\ x_2 + 2 - 2 \end{bmatrix} = x = \begin{bmatrix} 1 + x_1 - 1 \\ 2 + x_2 - 2 \end{bmatrix} = 0_V \oplus_1 x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

■

SLUT