

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 7 uppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. Låt A vara matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(8 p)

(a) Bestäm för vilka $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning. (2 p)

(b) Låt nu A vara en godtycklig reell $n \times m$ -matris, och anta att ekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Visa att ekvationen $A^T \mathbf{y} = 0$ endast har den triviella lösningen $\mathbf{y} = 0$ (4 p)

(c) Matrisen från (b) har kompakt singularvärdesdekomposition $A = U\Sigma V^T$. Vad är dimensionerna till U , Σ och V ? (2 p)

2. Vi betraktar en funktion $F: P_2 \rightarrow P_2$ där

$$F(p)(t) = (t-1)p'(t) + p(t)$$

(10 p)

för alla t . ($F(p)(t)$ är polynomen $F(p)$, evaluerad i t .)

(a) Visa att F är en linjär avbildning. (3 p)

I P_2 använder vi standardbasen $\{q_1, q_2, q_3\}$, där

$$q_1(t) = 1, \quad q_2(t) = t, \quad q_3(t) = t^2,$$

(b) Beräkna matrisen för F i standardbasen. (3 p)

(c) Bestäm alla par (λ, p) , där $\lambda \in \mathbb{R}$ och $p \in P_2$ som uppfyller (4 p)

$$F(p) = \lambda p$$

3. I den här uppgiften kan du använda att

(10 p)

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! \quad \text{För } n = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Visa att

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t} dt$$

är ett skalärprodukt på rummet av polynom P . (4 p)

(b) Beräkna en ortonormerad (i skalärproduktet från a) bas för rummet av polynom av grad högst ett P_1 . (3 p)

(c) Beräkna det förstgradspolynom p som minimerar (3 p)

$$\int_0^\infty (p(t) - t^2)^2 e^{-t} dt.$$

4. Antag att A är en symmetrisk reell $n \times n$ matris så att $A^2 = A$. (10 p)

(a) Visa att A inte kan ha andra egenvärden än 0 och 1. (3 p)

(b) Låt $r = \text{rank } A > 0$. Visa att det finns en $n \times r$ -matris Q så att Q har ortonormala kolumner och (3 p)

$$A = QQ^\top.$$

(c) Visa att avbildningen

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

är en ortogonal projektion på ett underrum $U \subset \mathbb{R}^n$. (4 p)

5. En CPU i en dator räknar flyttalsoperationer med addition, subtraktion och multiplikation på samma sätt som vi räknar på papper. (Fast i binära tal.) För divisionen $\frac{1}{d}$ använder några CPUer Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. (8 p)

(a) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. Ditt svar ska inte innehålla division. (3 p)

(b) Visa att för det relative felet

$$\frac{\delta x_n}{x^*} = \frac{x_n - x^*}{x^*}$$

gäller (3 p)

$$\frac{\delta x_{n+1}}{x^*} = - \left[\frac{\delta x_n}{x^*} \right]^2$$

Newtons metod måste kombineras med något startvärde x_0 , och antal iterationer som behövs beror på hur nära startvärdet är den faktiska lösningen och hur stor precision som önskas i slutresultatet.

(c) Vi önskar att $\frac{1}{d}$ ska beräknas med relativt fel mindre än 10^{-16} till belopp i fyra iterationer. Hur noggrann måste startapproximationen x_0 vara? (2 p)

6. I QR-algoritmen beräknas egenvärden till en matris A_0 genom att successivt beräkna (8 p)

$$Q_n R_n = A_n \quad (\text{full QR-faktorisering})$$

$$A_{n+1} = R_n Q_n$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Visa att A_n har samma egenvärden som A_0 . (3 p)

(b) Det upplysas att om metoden konvergerar, så vill $Q_n \rightarrow I$. Forklara hur du kan estimera A_0 's egenvärden från A_n . (3 p)

(c) Antag att A_0 är reell, men har komplexa egenvärden. Forklara varför QR-algoritmen inte kan konvergera i det här fallet. (2 p)

7. Enligt en modell utvecklar populationerna av harar (x) och rävar (y) på en ö sig enligt en differentialekvation: (6 p)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - xy \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2}xy - y\end{aligned}$$

Där x och y representerar antal tusen individer. (Den här modellen kallas Lotka–Volterra modellen).

- (a) Låt startpopulationerna vara $x(0) = 1$ och $y(0) = 4$ och använd ett steg med Euler framåt för att beräkna en approximasjon av $x(0.25)$, $y(0.25)$. (3 p)
- (b) Euler framåt fungerar tyvärr inte särskild bra på den här ekvationen. Förklara vilket problem som kan uppstå om vi använder Euler framåt med för lång steglängd. (Hint: När är modellen meningsfull?). (3 p)

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen - Lösning

1. Låt A vara matrisen

(8 p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestäm för vilka $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning. (2 p) **Lösning:** Matrisen har rang 2, så ekvationen har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Låt nu A vara en godtycklig reell $n \times m$ -matris, och anta att ekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Visa att ekvationen $A^T \mathbf{y} = 0$ endast har den triviella lösningen $\mathbf{y} = 0$ (4 p) **Lösning:** Vi har att $V(A) = \mathbb{R}^n$. Det innebär att

$$N(A^T) = V(A)^\perp = (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$$

där $\{0\}$ är underrummet som består av endast nollvektorn.

- (c) Matrisen från (b) har kompakt singularvärdesdekomposition $A = U\Sigma V^T$. Vad är dimensionerna till U , Σ och V ? (2 p) **Lösning:** Matrisen har $\text{rank}(A) = \dim V(A) = n$. Då är $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, och vi ser att

$$\begin{aligned} U &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ V^T &\in \mathbb{R}^{n \times m} \Rightarrow \\ V &\in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

2. Vi betraktar en funktion $F: P_2 \rightarrow P_2$ där

(10 p)

$$F(p)(t) = (t-1)p'(t) + p(t)$$

för alla t . ($F(p)(t)$ är polynomen $F(p)$, evaluerad i t .)

- (a) Visa att F är en linjär avbildning. (3 p) **Lösning:** Vi har att för $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q \in P_2$ så är

$$\begin{aligned} F(\alpha p + \beta q)(t) &= (t-1)(\alpha p + \beta q)'(t) + (\alpha p + \beta q)(t) \\ &= \alpha((t-1)p'(t) + p(t)) + \beta((t-1)q'(t) + q(t)) \\ &= \alpha F(p)(t) + \beta F(q)(t) \\ &= (\alpha F(p) + \beta F(q))(t) \end{aligned}$$

I P_2 använder vi standardbasen $\{q_1, q_2, q_3\}$, där

$$q_1(t) = 1, \quad q_2(t) = t, \quad q_3(t) = t^2,$$

(b) Beräkna matrisen för F i standardbasen.

(3 p) **Lösning:**

Beräknar

$$F(q_1)(t) = 1$$

$$F(q_2)(t) = 2t - 1$$

$$F(q_3)(t) = 3t^2 - 2t$$

Matrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Bestäm alla par (λ, p) , där $\lambda \in \mathbb{R}$ och $p \in P_2$ som uppfyller

(4 p)

$$F(p) = \lambda p$$

Lösning: Vi ska här lösa ett egenvärdesproblem. Vi kan lösa det i koordinater, då ska vi bestämma egenvärden och egenvektorerna till matrisen A . Då matrisen är diagonal ser vi att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$, och vi kan lösa för egenvektorerna och får att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De motsvarande polynomen är

$$p_1(t) = 1 \quad p_2(t) = t - 1 \quad p_3(t) = t^2 - 2t + 1$$

Egenvektorer är endast bestämda upp till multiplikation med en skalär, så alla egenpar är mängden

$$\{(1, \alpha p_1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(2, \alpha p_2) : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(3, \alpha p_3) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

3. I den här uppgiften kan du använda att

(10 p)

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! \quad \text{För } n = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Visa att

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t} dt$$

är ett skalärprodukt på rummet av polynom P . (4 p) **Lösning:** Integralen är väl definerad, då för alla p och q , är $p(t)q(t)$ igen ett polynom på formen

$$p(t)q(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$$

och integralet

$$\int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t} dt$$

kan även beräknas exakt vid den uppgivna formeln.

Formeln är uppenbart bilinjär och symmetrisk i p och q .

Vi har även att

$$\langle p, p \rangle = \int_0^\infty p(t)^2 e^{-t} dt$$

är ett integral av en kontinuerlig icke-negativ funktion för alla p . Då är integralen icke-negativ, och den är 0 endast om integranden är lika 0 för alla $t \in [0, \infty)$. Om $p(t)^2 e^{-t} = 0$, så är även $p(t) = 0$ för alla t .

- (b) Beräkna en ortonormerad (i skalärproduktet från a) bas för rummet av polynom av grad högst ett P_1 . (3 p) **Lösning:**

$$e_1 = 1 \quad e_2 = t - 1$$

- (c) Beräkna det förstgradspolynom p som minimerar (3 p)

$$\int_0^\infty (p(t) - t^2)^2 e^{-t} dt.$$

Lösning: Uppgiften lösas av den ortogonala projektionen av $q(t) = t^2$ på P_1 . Vi har

$$p = \langle q, e_1 \rangle e_1 + \langle q, e_2 \rangle e_2 = 2e_1 + 4e_2 p(t) = 4t - 2$$

4. Antag att A är en symmetrisk reell $n \times n$ matris så att $A^2 = A$. (10 p)

- (a) Visa att A inte kan ha andra egenvärden än 0 och 1. (3 p) **Lösning:** Om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med $\mathbf{v} \neq 0$, så är

$$A^2\mathbf{v} = A\mathbf{v} \Rightarrow \lambda^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0.$$

som innebär att λ är lika med 0 eller 1.

- (b) Låt $r = \text{rank } A > 0$. Visa att det finns en $n \times r$ -matris Q så att Q har ortonormala kolumner och (3 p)

$$A = QQ^\top.$$

Lösning:

A är symmetrisk, så vi kan använda spektralsatsen. Från (a) vet vi att egenvärdena är 0 och 1, och från $\text{rank } A = r$ vet vi att det finns r linjärt oberoende egenvektorer tillhörande 1, och $n - r$ linjärt oberoende egenvektorer tillhörande 0. Ordna vi egenvärdena med ett först har vi blockformen

$$A = VDV^\top = [V_1 \quad V_2] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\top \\ V_2^\top \end{bmatrix} = V_1 V_1^\top.$$

där kolumnerna i V_1 är en ortonormerad bas för egenrummet $E(1)$. $Q = V_1$ uppfyller alltså ekvationen.

- (c) Visa att avbildningen

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

är en ortogonal projektion på ett underrum $U \subset \mathbb{R}^n$. (4 p) **Lösning:** Låt $U = V(A) = E(1)$. Då är $A\mathbf{x} \in U$. För alla $\mathbf{u} \in U$ kan vi skriva $\mathbf{u} = Q\mathbf{y}$ och vi har

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - A\mathbf{x} \rangle &= \langle Q\mathbf{y}, \mathbf{x} - QQ^\top\mathbf{x} \rangle \\ &= \mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{x} - \mathbf{y}^\top Q^\top QQ^\top \mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{x} - \mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{x} \quad (\text{Då } Q^\top Q = I_r \text{ pga. ortonormala kolumner}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. En CPU i en dator räknar flyttalsoperationer med addition, subtraktion och multiplikation på samma sätt som vi räknar på papper. (Fast i binära tal.) För divisionen $\frac{1}{d}$ använder några CPUer Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. (8 p)

- (a) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. Ditt svar ska inte innehålla division. (3 p) **Lösning:**

$$x_{n+1} = x_n + (x_n - dx_n^2) = 2x_n - dx_n^2$$

(b) Visa att för det relative felet

$$\frac{\delta x_n}{x^*} = \frac{x_n - x^*}{x^*}$$

gäller

(3 p)

$$\frac{\delta x_{n+1}}{x^*} = - \left[\frac{\delta x_n}{x^*} \right]^2$$

Lösning: Vi vet att $x^* = \frac{1}{d}$, och skriver $x_n = \frac{1}{d} + \delta x_n$ då har vi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2}{d} + 2\delta x_n - d \left(\frac{1}{d^2} - 2\frac{\delta x_n}{d} - (\delta x_n)^2 \right) \\ &= \frac{1}{d} - d(\delta x_n)^2 \end{aligned}$$

och vi har

$$\frac{\delta x_{n+1}}{x^*} = d(x_{n+1} - \frac{1}{d}) = -d^2(\delta x_n)^2 = - \left[\frac{\delta x_n}{x^*} \right]^2$$

Newtons metod måste kombineras med något startvärde x_0 , och antal iterationer som behövs beror på hur nära startvärdet är den faktiska lösningen och hur stor precision som önskas i slutresultatet.

(c) Vi önskar att $\frac{1}{d}$ ska beräknas med relativt fel mindre än 10^{-16} till belopp i fyra iterationer. Hur noggrann måste startapproximationen x_0 vara? (2 p) **Lösning:** Felet kvadreras i varje iteration, så vi måste ha. Vi måste ha $|x_0 - \frac{1}{d}| \leq 10^{-1}$

(I faktiska implementationer av den här algoritmen, använder man en linjär approximation till $\frac{1}{d}$ på intervallet $1 \leq d \leq 2$, och kan då ha ett relativt fel mindre enn $\frac{1}{17}$.)

6. I QR-algoritmen beräknas egenvärden till en matris A_0 genom att successivt beräkna

(8 p)

$$\begin{aligned} Q_n R_n &= A_n \quad (\text{full QR-faktorisering}) \\ A_{n+1} &= R_n Q_n \end{aligned}$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Visa att A_n har samma egenvärden som A_0 . (3 p) **Lösning:** $A_{n+1} = Q_n^\top A_n Q_n$ medför att A_{n+1} och A_n är similära, och har gemensamma egenvärden. Vid induktion följer att A_n och A_0 är similära.

(b) Det upplysas att om metoden konvergerar, så vill $Q_n \rightarrow I$. Förklara hur du kan estimerar A_0 's egenvärden från A_n . (3 p) **Lösning:** Ser att då $Q_n \rightarrow I$ så vill $A_n - R_n \rightarrow 0$, det vill säga att A_n går mot att vara uppåt triangulär. Uppåt triangulära matriser har egenvärdena på diagonalen, så vi kan approximera A_n s med dens diagonalelement.

(c) Antag att A_0 är reell, men har komplexa egenvärden. Förklara varför QR-algoritmen inte kan konvergera i det här fallet. (2 p) **Lösning:** Matriserna i QR-algoritmen är alltid reella, därför kan inte matrisen A_n gå mot en matris med egenvärdena till A_0 på diagonalen.

7. Enligt en modell utvecklar populationerna av harar (x) och rävar (y) på en ö sig enligt en differentialekvation: (6 p)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - xy \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2}xy - y\end{aligned}$$

Där x och y representerar antal tusen individer. (Den här modellen kallas Lotka–Volterra modellen).

- (a) Låt startpopulationerna vara $x(0) = 1$ och $y(0) = 4$ och använd ett steg med Euler framåt för att beräkna en approximasjon av $x(0.25)$, $y(0.25)$. (3 p) **Lösning:**

$$\begin{aligned}x(0.25) &\approx x_1 = x_0 + h(2x_0 - x_0y_0) \\ y(0.25) &\approx y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{2}x_0y_0 - y_0\right)\end{aligned}$$

Med $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, $h = 0.25$ får vi

$$x_1 = 0.5, \quad y_1 = 3.5$$

- (b) Euler framåt fungerar tyvärr inte särskild bra på den här ekvationen. Förklara vilket problem som kan uppstå om vi använder Euler framåt med för lång steglängd. (Hint: När är modellen meningsfull?) (3 p) **Lösning:** Modellen är bara meningsfull för positiva x och y . Vi ser att med t.ex. samma startvärden som i (a), men med steglängd större än 0.5, blir $x_1 < 0$. (Faktisk så kommer problemet att uppstå med även mindre steglängd, men kanske efter flera steg.)