

## TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

### Tentamen

---

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 9 uppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

*Lycka till!*

Geir

1. Vi betraktar funktionen  $F: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (där  $P_2$  är rummet av polynom av grad högst 2) given av (10 p)

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

- (a) Visa att  $F$  är en linjär avbildning. (3 p)

I  $P_2$  använder vi basen  $\{q_1, q_2, q_3\}$ , där

$$q_1(t) = 1, \quad q_2(t) = t, \quad q_3(t) = t^2,$$

och i  $\mathbb{R}^2$  använder vi standardbasen.

- (b) Beräkna matrisen för  $F$  i de uppgivna baserna. (3 p)

- (c) Bestäm nollrummet till  $F$ ,  $N(F) \subseteq P_2$ . (2 p)

Funktionen  $G: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  är given av

$$G(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

- (d) Bestäm en bas för  $P_2$  så att matrisen för  $G$  i den basen och standardbasen för  $\mathbb{R}^3$  är nedåt triangulär. (2 p)

**Hint:** Tänk interpolationspolynom.

2. Låt (10 p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Lös minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|.$$

Låt  $B$  vara en  $n \times m$ -matris med där  $n \geq m$  och anta att  $B = QR$ , där  $Q$  är en  $n \times m$ -matris med ortonormala kolumner, och  $R$  en uppåt triangulär  $m \times m$ -matris utan nollor på diagonalen. Låt vidare  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .

- (b) Visa att de två ekvationssystemen

$$\begin{aligned} B^\top B\mathbf{x} &= B^\top \mathbf{c}, \\ R\mathbf{x} &= Q^\top \mathbf{c} \end{aligned}$$

er ekvivalenta (har samma lösning). (4 p)

- (c) Visa att den gemensamma lösningen till de två ekvationssystemen är lösning till minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} \|B\mathbf{x} - \mathbf{c}\|.$$

3. Är (4 p)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

ett skalärprodukt på  $\mathbb{R}^2$ ? Varför/varför inte?

4. Låt (5 p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm  $A$ s egenvärden och egenvektorer. (2 p)  
(b) Lös begynnelsesvärdeproblemet (3 p)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

5. Låt  $A$  vara en reell  $n \times n$  matris. Anta  $A$  har endast ett egenvärde  $\lambda$  och att det finns  $n$  linjärt oberoende egenvektorer tillhörande detta egenvärdet. (6 p)

- (a) Visa att  $A = \lambda I$ . (3 p)

Låt  $B$  vara en symmetrisk reell  $n \times n$  matris så att  $B^2 = 2B$ .

- (b) Visa att antingen är  $B = 2I$ , annars så är  $B$  singulär (ej inverterbar). (3 p)

6. Kvadraturformeln Simpsons regel på intervallet  $[-1, 1]$  definieras genom att sätta (9 p)

$$Q(f) = \int_{-1}^1 p_2(x) dx$$

där  $p_2$  är andragradspolynomet som interpolerar  $f$  i punkterna  $-1, 0$  och  $1$ .

- (a) Härled Simpsons regel på intervallet  $[-1, 1]$  på formen (3 p)

$$Q(f) = w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1).$$

- (b) Visa att Simpsons regel ger korrekt svar för alla polynom av grad högst 3, men inte för polynom av grad 4. (2 p)

Anta att  $Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  är en kvadraturformel på intervallet  $[-1, 1]$  som bygger på polynominterpolation på delintervall.

- (c) Visa att  $\sum_{i=1}^n w_i = 2$ . (2 p)

- (d) Anta att  $f$  endast kan beräknas med absoluttfel  $|\delta f(x)| = |\hat{f}(x) - f(x)| \leq \Delta$ , och att  $w_i \geq 0$  för alla  $i$ .

Visa att för det fortplantade felet  $\delta Q(f) = Q(\hat{f}) - Q(f)$  gäller (2 p)

$$|\delta Q(f)| \leq 2\Delta.$$

7. Vi löser ekvationen  $f(x) = \sin x + x - \frac{\pi}{2} = 0$  med Newtons metod. (6 p)

- (a) Visa att ekvationen har exakt en reell lösning  $x^*$ , och att den finns i intervallet  $(0, \frac{\pi}{2})$ . (2 p)
- (b) Sätt upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen, och utför ett steg från initialvärdet  $x_0 = 0$ . (2 p)
- (c) Visa att för  $x_k \in (0, \frac{\pi}{2})$  gäller felgränsen (2 p)

$$|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|.$$

8. Vi studerar ett system av differentialekvationer (5 p)

$$\begin{cases} y'(t) = v(t), \\ v'(t) = -y(t). \end{cases}$$

(Differentialekvationerna beskriver till exempel en harmonisk oscillator.)

- (a) Skriv upp iterationsformlerna för Eulers framåtmetod och Eulers bakåtmetod tillämpad på systemet. (3 p)
- (b) Utför ett steg med Eulers bakåtmetod där du använder steglängd  $h = \frac{1}{2}$  och initialvärdena (2 p)

$$y(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

9. Vi studerar ett optimeringsproblem (5 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

där

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x},$$

och  $A$  är positiv definit  $n \times n$ -matris, och  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Beskriv alla descentriktningar i ett punkt  $\mathbf{x}$ . (2 p)
- (b) Härled formeln för optimal lösning av linjesökingsproblemet  $\min_{\alpha} f(x_k + \alpha s_k)$ , (3 p)

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^\top s_k}{s_k^\top A s_k}$$

## TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

### Tentalösning

---

1. Vi betraktar funktionen  $F: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (där  $P_2$  är rummet av polynom av grad högst 2) given av

(10 p)

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

- (a) Visa att  $F$  är en linjär avbildning. (3 p)

**Lösning:** Vi må visa att för alla polynomer  $p$  och  $q$  i  $P_2$ , och alla reella tal  $\alpha, \beta$  gäller

$$F(\alpha p + \beta q) = \alpha F(p) + \beta F(q)$$

I det aktuella tillfället har vi

$$\begin{aligned} F(\alpha p + \beta q) &= \begin{bmatrix} (\alpha p + \beta q)(1) \\ (\alpha p + \beta q)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha p(1) + \beta q(1) \\ \alpha p(2) + \beta q(2) \end{bmatrix} = \\ &= \alpha \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \end{bmatrix} = \alpha F(p) + \beta F(q) \end{aligned}$$

I  $P_2$  använder vi basen  $\{q_1, q_2, q_3\}$ , där

$$q_1(t) = 1, \quad q_2(t) = t, \quad q_3(t) = t^2,$$

och i  $\mathbb{R}^2$  använder vi standardbasen.

- (b) Beräkna matrisen för  $F$  i de uppgivna baserna. (3 p)

**Lösning:** Vi evaluerar  $F: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i basvektorerna för  $P_2$ .

$$F(q_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(q_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F(q_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matrisen för  $F$  blir

$$A = [F(q_1) \quad F(q_2) \quad F(q_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- (c) Bestäm nollrummet till  $F$ ,  $N(F) \subseteq P_2$ . (2 p)

**Lösning:** Här kan man radreducera  $A$ , men vi kan också observera att nollrummet till  $F$  består av de polynom av grad 2 som har  $p(1) = p(2) = 0$ , det vill säga polynom med faktor  $(t-2)(t-1)$

$$N(F) = \{p : p(t) = \alpha(t-2)(t-1), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Funktionen  $G: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  är given av

$$G(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

- (d) Bestäm en bas för  $P_2$  så att matrisen för  $G$  i den basen och standardbasen för  $\mathbb{R}^3$  är nedåt triangulär. (2 p)

**Hint:** Tänk interpolationspolynom.

**Lösning:** Det finns oändligt många lösningar. Det som behövs är 3 polynom i  $P_2$ ,  $\{f_1, f_2, f_3\}$  så att

- $f_1, f_2, f_3$  är linjärt oberoende (annars ingen bas).
- Matrisen till  $G$ ,

$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \end{bmatrix},$$

är nedåt triangulär.

Det andra kravet medför att

$$f_3(0) = f_3(1) = 0 \Rightarrow f_3(t) = \alpha t(t-1),$$

där  $\alpha \in \mathbb{R}$ , och att

$$f_2(0) = 0 \Rightarrow f_2(t) = tp(t),$$

där  $p$  är ett polynom av grad högst 1. Vi kan t.ex. sätta  $\alpha = 1$  och  $p(t) = 1$ , så  $f_2(t) = t, f_3(t) = t(t-1)$ . Nu har alla polynomen i rummet uppspänd av  $f_2$  och  $f_3$  konstant lika 0, så för att få en bas, måste  $f_1$  ha konstant olika noll. För enkelhetens skull, sätter vi  $f_1 = 1$ .

2. Låt

(10 p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Lös minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|.$$

**Lösning:** Normalekvationerna är

$$A^\top \mathbf{Ax} = A^\top \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

med lösning

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Låt  $B$  vara en  $n \times m$ -matris med där  $n \geq m$  och anta att  $B = QR$ , där  $Q$  är en  $n \times m$ -matris med ortonormala kolumner, och  $R$  en uppåt triangulär  $m \times m$ -matris utan nollor på diagonalen. Låt vidare  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .

- (b) Visa att de två ekvationssystemen

$$\begin{aligned} B^\top B \mathbf{x} &= B^\top \mathbf{c}, \\ R \mathbf{x} &= Q^\top \mathbf{c} \end{aligned}$$

er ekvivalenta (har samma lösning). (4 p)

**Lösning:** Då  $B = QR$ , har vi  $B^\top = R^\top Q^\top$  och då  $Q$  har ortonormala kolumner, gäller det att  $Q^\top Q = I$ .

$$B^\top B = (R^\top Q^\top)Q^\top R = R^\top(Q^\top Q)R = R^\top R$$

Vi har därför

$$B^\top B\mathbf{x} = B^\top \mathbf{c} \Leftrightarrow R^\top R\mathbf{x} = R^\top Q^\top \mathbf{c}$$

$R^\top$  är inverterbar, då det är en nedåt triangulär matris utan nollor på diagonalen, så vi har även

$$R^\top R\mathbf{x} = R^\top Q^\top \mathbf{c} \Leftrightarrow R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{c}.$$

- (c) Visa att den gemensamma lösningen till de två ekvationssystemen är lösning till minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} \|B\mathbf{x} - \mathbf{c}\|.$$

**Lösning:** Vi visar att minsta kvadrat-problemet lösas av normalekvationerna.

Låt  $P$  vara matrisen till den ortogonala projektionen på rummet uppspänd av  $B$ s kolumner  $= V(B) \subset \mathbb{R}^n$ .  $P$  är definierad vid att  $P\mathbf{y} \in V(B)$  och  $\mathbf{y} - P\mathbf{y} \in V(B)^\perp$ . Från Pythagoras har vi att

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|P\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y} - P\mathbf{y}\|^2$$

Specifikt gäller det för vektorn  $\mathbf{y} = B\mathbf{x} - \mathbf{c}$ .

För godtycklig  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , gäller  $P B\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ , då  $B\mathbf{x} \in V(B)$ , så vi har att

$$P\mathbf{y} = P B\mathbf{x} - P\mathbf{c} = B\mathbf{x} - P\mathbf{c}$$

och

$$\mathbf{y} - P\mathbf{y} = P\mathbf{c} - \mathbf{c}$$

För normen har vi nu

$$\|B\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 = \|B\mathbf{x} - P\mathbf{c}\|^2 + \|P\mathbf{c} - \mathbf{c}\|^2$$

Andra ledet kan vi inte påverka genom att ändra  $\mathbf{x}$ , men första kan vi göra lika noll genom att lösa ekvationen

$$B\mathbf{x} = P\mathbf{c}.$$

Ekvationen har en lösning då  $P\mathbf{c} \in V(B)$ .

Den faktiska ekvationen för  $\mathbf{x}$ , får vi genom att använda att

$$P\mathbf{c} - \mathbf{c} = B\mathbf{x} - \mathbf{c} \in V(B)^\perp = N(B^\top) \Leftrightarrow B^\top(B\mathbf{x} - B^\top \mathbf{c}) = 0$$

3. Är

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

(4 p)

ett skalärprodukt på  $\mathbb{R}^2$ ? Varför/varför inte?

**Lösning:** Uttrycket är båda symmetrisk i  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  och linjärt i vart av argumenten, men det är inte ett skalärprodukt, då

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2$$

kan vara negativt.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(5 p)

- (a) Bestäm  $A$ s egenvärden och egenvektorer. (2 p)

**Lösning:**

$$\det A - \lambda I = \lambda^2 - 25$$

med lösning  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = -5$ . Egenvektorerna fås genom att lösa

$$(A - 5I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$(A + 5I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som ger

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

där  $\alpha$  och  $\beta$  är godtyckliga reella tal olika 0.

- (b) Lös begynnelsesvärdeproblemet (3 p)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

**Lösning:** Ekvationen lösas genom att använda en bas av egenvektorer för  $A$ . Vi sätter

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Om  $\mathbf{y}(t) = z_1(t)\mathbf{v}_1 + z_2(t)\mathbf{v}_2$ , blir differentialekvationen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= A\mathbf{y}(t) \\ z_1'(t)\mathbf{v}_1 + z_2'(t)\mathbf{v}_2 &= z_1(t)A\mathbf{v}_1 + z_2(t)A\mathbf{v}_2 \\ &= 5z_1(t)\mathbf{v}_1 - 5z_2(t)\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Det vill säga att

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= 5z_1(t) \Rightarrow z_1(t) = e^{5t}z_1(0) \\ z_2'(t) &= -5z_2(t) \Rightarrow z_2(t) = e^{-5t}z_2(0) \end{aligned}$$

För att bestämma  $z_1(0)$  och  $z_2(0)$  löser vi ekvationen

$$z_1(0)\mathbf{v}_1 + z_2(0)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

med lösning  $z_1(0) = \frac{1}{2}$ ,  $z_2(0) = -\frac{1}{2}$ . Vi får att

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= z_1(t)\mathbf{v}_1 + z_2(t)\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}e^{5t}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}e^{-5t}\mathbf{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{5t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \\ \frac{1}{2}e^{5t} + \frac{3}{2}e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Låt  $A$  vara en reell  $n \times n$  matris. Anta  $A$  har endast ett egenvärde  $\lambda$  och att det finns  $n$  linjärt oberoende egenvektorer tillhörande detta egenvärdet. (6 p)

- (a) Visa att  $A = \lambda I$ . (3 p)

**Lösning:**  $n$  linjärt oberoende vektorer i  $\mathbb{R}^n$  utgör en bas för  $\mathbb{R}^n$ , så egenrummet tillhörande  $\lambda$  är hela  $\mathbb{R}^n$ . Därför är  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  för alla  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Låt  $B$  vara en symmetrisk reell  $n \times n$  matris så att  $B^2 = 2B$ .



- (b) Visa att antingen är  $B = 2I$ , annars så är  $B$  singulär (ej inverterbar). (3 p)

**Lösning:** Då  $B$  är symmetrisk, vet vi att det finns  $n$  linjärt oberoende egenvektorer till  $B$  (spektralsatsen). Om  $\lambda$  är egenvärde till  $B$  med tillhörande egenvektor  $\mathbf{v}$ , har vi att  $B^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} = 2B\mathbf{v} = 2\lambda\mathbf{v}$ . Det är endast möjligt om  $\lambda = 0$  eller  $\lambda = 2$ .

Om  $\lambda = 2$  det enda egenvärdet till  $B$ , är de  $n$  linjärt oberoende egenvektorerna till  $B$  alla tillhörande  $\lambda = 2$ . Från (a) vet vi då att  $B = 2I$ . Om  $\lambda = 2$  inte är det enda egenvärdet till  $B$ , måste  $\lambda = 0$  vara egenvärde till  $B$ , och matrisen är därför singulär.

6. Kvadraturformeln Simpsons regel på intervallet  $[-1, 1]$  definieras genom att sätta (9 p)

$$Q(f) = \int_{-1}^1 p_2(x) dx$$

där  $p_2$  är andragradspolynomet som interpolerar  $f$  i punkterna  $-1, 0$  och  $1$ .

- (a) Härled Simpsons regel på intervallet  $[-1, 1]$  på formen (3 p)

$$Q(f) = w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1).$$

**Lösning:** Om vi skriver  $p_2$  på formen

$$p_2(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x(x-1)$$

och löser för koefficienterna, får vi

$$p_2(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)) + \frac{x(x-1)}{2}(f(-1) - 2f(0) + f(1))$$

Vi har då

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p_2(x) dx &= 2f(0) + 0 \cdot (f(1) - f(0)) + \frac{1}{3}(f(-1) - 2f(0) + f(1)) \\ &= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \end{aligned}$$

- (b) Visa att Simpsons regel ger korrekt svar för alla polynom av grad högst 3, men inte för polynom av grad 4. (2 p)

**Lösning:** Det räcker att visa det på intervallet  $[-1, 1]$ . Om vi har ett annat intervall, kan vi göra ett linjärt byte av variabel för att få intervallet  $[-1, 1]$ . Från definitionen är det klart att Simpsons regel ger korrekt svar för alla polynom av grad högst 2. Då båda integration och Simpsons regel är linjära operationer räcker det att se på polynomen  $x^3$  och  $x^4$ .

Sätter inn i formeln över och får

$$Q(x^3) = \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}0^3 + \frac{1}{3}1^3 = 0.$$

Då också

$$I(x^3) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

ger regeln korrekt svar.

Men

$$Q(x^4) = \frac{1}{3}(-1)^4 + \frac{4}{3}0^4 + \frac{1}{3}1^4 = \frac{2}{3}$$

som inte är lika med

$$I(x^4) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$$

Anta att  $Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  är en kvadraturformel på intervallet  $[-1, 1]$  som bygger på polynominterpolation på delintervall.

- (c) Visa att  $\sum_{i=1}^n w_i = 2$ . (2 p)

**Lösning:** Kvadraturformeln ger exakt svar för funktionen  $f(x) = 1$ .

- (d) Anta att  $f$  endast kan beräknas med absoluttfel  $|\delta f| = |\hat{f} - f| \leq \Delta$ . Visa att för det fortplantade felet  $\delta Q(f) = Q(\hat{f}) - Q(f)$  gäller (2 p)

$$|\delta Q(f)| \leq 2\Delta.$$

**Lösning:** Vi har att

$$Q(\hat{f}) - Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i(\hat{f}(x_i) - f(x_i)) = \sum_{i=1}^n w_i \delta f(x_i)$$

och att

$$\left| \sum_{i=1}^n w_i \delta f(x_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n w_i |\delta f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n w_i |\delta f(x_i)|$$

7. Vi löser ekvationen  $f(x) = \sin x + x - \frac{\pi}{2} = 0$  med Newtons metod. (6 p)

- (a) Visa att ekvationen har exakt en reell lösning  $x^*$ , och att den finns i intervallet  $(0, \frac{\pi}{2})$ . (2 p)

**Lösning:** Funktionen  $f(x)$  är kontinuerlig och vi har  $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ . Det innebär att ekvationen har minst en lösning på intervallet  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Vi har också att  $f'(x) = \cos x + 1 \geq 1$  för alla  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , så ekvationen kan inte ha mer än en lösning. Äntligen har vi att  $f'(x) \geq 0$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ , som innebär att det inte kan existera någon lösning utanför intervallet.

- (b) Sätt upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen, och utför ett steg från initialvärdet  $x_0 = 0$ . (2 p)

**Lösning:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin x + x - \frac{\pi}{2}}{\cos x + 1}$$
$$x_1 = 0 - \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

- (c) Visa att för  $x_k \in (0, \frac{\pi}{2})$  gäller felgränsen (2 p)

$$|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|.$$

**Lösning:** Vi har från tidigare att  $f'(x) \geq 1$  för alla  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Från medelvärdessatsen har vi att

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(\xi)(x_k - x^*) = 0 + f'(\xi)(x_k - x^*) \Leftrightarrow (x_k - x^*) = \frac{f(x_k)}{f'(\xi)}$$

för någon  $\xi$  mellan  $x_k$  och  $x^*$ . Då  $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$  har vi  $f'(\xi) \geq 1$ , och det följer att

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{1} = |f(x_k)|$$

8. Vi studerar ett system av differentialekvationer (5 p)

$$\begin{cases} y'(t) = v(t), \\ v'(t) = -y(t). \end{cases}$$

(Differentialekvationerna beskriver till exempel en harmonisk oscillator.)

- (a) Skriv upp iterationsformlerna för Eulers framåtmetod och Eulers bakåtmetod tillämpad på systemet. (3 p)

**Lösning:** Eulers framåtmetod:

$$y_{k+1} = y_k + hv_k$$

$$v_{k+1} = v_k - hy_k$$

Eulers framåtmetod:

$$y_{k+1} = y_k + hv_{k+1}$$

$$v_{k+1} = v_k - hy_{k+1}$$

- (b) Utför ett steg med Eulers bakåtmetod där du använder steglängd  $h = \frac{1}{2}$  och initialvärdena (2 p)

$$y(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

**Lösning:** Eulers bakåtmetod är

$$y_1 = y_0 + hv_1$$

$$v_1 = v_0 - hy_1,$$

Genom att sätta in för  $h = \frac{1}{2}$ ,  $y_0 = y(0) = 1$ , och  $v_0 = v(0) = 0$ , och flytta över, får vi ekvationssystemet

$$y_1 - \frac{1}{2}v_1 = 1$$

$$v_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0$$

Lösningen är

$$y_1 = \frac{4}{5}v_1 = -\frac{2}{5}$$

9. Vi studerar ett optimeringsproblem

(5 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

där

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x},$$

och  $A$  är positiv definit  $n \times n$ -matris, och  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Beskriv alla descentriktningar i ett punkt  $\mathbf{x}$ . (2 p)

**Lösning:** Descentriktningarna är de riktningar där funktionen avtar. Det vill säga alla riktningar  $\mathbf{s}$  så att

$$\nabla f(\mathbf{x})^\top \mathbf{s} < 0$$

För den aktuella funktionen har vi på koefficientform

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

och

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_{ik} x_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n A_{kj} x_j - b_k \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (A_{ik} + A_{ki}) x_i - b_k \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ki} x_i - b_k \end{aligned}$$

(I sista likheten har vi använt att  $A$  är symmetrisk.) På vektorform har vi då

$$\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

och descentriktningarna i ett punkt  $\mathbf{x}$  är alla vektorer  $\mathbf{s}$  så att

$$\mathbf{s}^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) < 0$$

(b) Härled formeln för optimal lösning av linjesökingsproblemet  $\min_{\alpha} f(x_k + \alpha s_k)$ , (3 p)

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^\top s_k}{s_k^\top A s_k}$$

**Lösning:** (Använder fet skrift för vektorer i lösningen.) När linjesökingsproblemet lösas optimal ska vi ha att

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k) = \nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k)^\top \mathbf{s}_k = 0$$

Från (a) vet vi att  $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - b$ , det innebär att

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k) = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha A \mathbf{s}_k.$$

Ekvationen för  $\alpha$  är därför

$$(\nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha A \mathbf{s}_k)^\top \mathbf{s}_k = 0.$$

Löser vi ut för  $\alpha$  får vi

$$\alpha = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^\top A \mathbf{s}_k}.$$