Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1/TM1, TMA671
2015-06-01

DAG: Måndag 1 juni 2015 TID: 14.00 - 18.00 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 24 juni, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a) Gör en LU-faktorisering, utan pivotering, av matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 1 & 5 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **(4p)**

b) Antag att du har en lösning x till det reguljära systemet $Ax = b$, där A är en $n \times n$-matris. Om vi ändrar matrisen lite (en ändring av rang 1) så att $\hat{A} = A + uv^T$ för vektorer u och v så får vi (i allmänhet) en annan lösning $\hat{x}$. Visa att $\hat{x} = x - \frac{v^T x}{1+v^T A^{-1} u} A^{-1} u$. **(3p)**

c) För stora n, hur mycket tjänar man på att använda formeln för $\hat{x}$ i b)-uppgiften när man vill lösa de två systemen $Ax = b$ och $\hat{A}\hat{x} = b$ jämfört med att lösa de båda problemen var för sig? **(2p)**

Uppgift 2.
a) Visa att Householdermatrisen $H = I - 2uu^T$, med $\|u\|_2 = 1$ definierar en linjär avbildning som geometriskt är en spegling i en linje genom origo. **(3p)**

b) Bestäm en QR faktorisering av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(4p)**

c) Anta att du har en singulärvärdesfaktorisering (SVD-faktorisering) av en matris A. Visa med hjälp av faktorerna i faktoriseringen att värderummet för A är ortogonala komplementet till nollrummet för A^T. **(3p)**

Uppgift 3.
Betrakta det linjära underrummet U till mängden av kontinuerligt deriverbara funktioner som definieras av $U = Span\{\sin t, \ \ \cos t, \ \ \sin 2t, \ \ \cos 2t\}$ med de ingående funktionerna som bas.

a) Bestäm matrisen för den linjära avbildningen från U till U som innebär att derivera. Bestäm även egenvärden och egenvektorer (egenfunktioner) till avbildningen. **(4p)**

b) Bestäm den bästa approximationen på intervallet $(0, 2\pi)$ av funktionen
$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ -2, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$ på underrummet U med avseende på skalärprodukten
$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Vad skulle svaret bli om man i stället approximerade med en andra ordningens Fourierserie? **(3p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med *diagonaliseringsmetoden*

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t), & x_1(0) = 6 \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), & x_2(0) = 0 \\ x_3'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t), & x_3(0) = -1 \end{cases}. \quad \textbf{(4p)}$$

b) Varför fungerar inte *diagonaliseringsmetoden* i uppgift a) om andra ekvationen i systemet ändras till $x_2'(t) = -2x_2(t), \quad x_2(0) = 0$? Var i processen uppstår problemet? Vilken egenskap hos egenvärdena relaterar du till detta problem? **(2p)**.

Uppgift 5.
Betrakta algoritmen $y = a^2 + b^2$ i ett IEEE-system.

a) Ta fram en gräns för framåtfelet i algoritmen uttryckt i avrundningsenheten i IEEE-systemet. Vi antar att a och b redan är lagrade i flyttalssystemet.**(3p)**

b) Utför bakåtfelanalys för algoritmen och uttryck gränserna för bakåtfelen i avrundningsenheten i IEEE-systemet. Vi antar att a och b redan är lagrade i flyttalssystemet. **(3p)**

c) Avgör genom att betrakta någon av feluppskattningarna i a)-uppgiften eller b)-uppgiften om algoritmen är stabil eller inte. **(1p)**

Uppgift 6.

a) Gör en iteration med *Newtons metod* med start i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på det icke-linjära ekvationssystemet: $\begin{cases} x_1^3 - 2x_3^2 = -1 \\ x_2^2 + 3x_3 = 4 \\ x_1x_2 - 2x_1^2x_3 = 0 \end{cases}$. **(4p)**

b) Redogör för vilka beräkningar du skulle behöva göra för att ta fram en feluppskattning för approximationen i a)-uppgiften. Räkningarna behöver inte genomföras. **(2p)**

Uppgift 7.

Betrakta ett matematiskt optimeringsproblem i flera variabler utan bivillkor.

a) Formulera en Kvasi-Newtonmetod för att lösa problemet. **(2p)**.

b) I en Kvasi-Newtonmetod ingår en matris med beteckningen B_k som är en approximation av en Hessianmatris. Visa att sökriktningen i Kvasi-Newtonmetoden blir en descentriktning om B_k är positivt definit. **(2p)**

c) Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^4 + x_1 - x_1x_2$ utan bivillkor. Gör en iteration med Steepest Descent-metoden, med start i origo och *exakt* linjesökning. **(3p)**

Uppgift 8.

Betrakta följande prediktor-korrektorpar för att lösa system av ODE:
(p) Eulers framåtmetod
(k) Eulers bakåtmetod

a) Vad blir approximationsordning och stabilitetsområde för metoden? Du behöver inte visa dessa bara tala om vad som gäller. **(2p)**

b) Antag att du gör två fixpunktsiterationer i korrektorn. Skriv upp metoden du då får. **(2p)**

c) Bestäm approximationsordning och stabilitetsvillkor för metoden i b)-uppgiften. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1/TM1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 1 juni 2015

1a) Två stegs Gausselimination ger: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = U = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L bestäms samtidigt på vanligt sätt (kompendium avsnitt 9.3): $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1b) Vi testar $\hat{A}\hat{x} = (A + uv^T)(x - \frac{1}{1+v^TA^{-1}u}(A^{-1}u)v^Tx =$
$= Ax - \frac{1}{1+v^TA^{-1}u}uv^Tx + uv^Tx - \frac{1}{1+v^TA^{-1}u}uv^T(A^{-1}u)v^Tx = Ax - \frac{1+v^TA^{-1}u}{1+v^TA^{-1}u}uv^Tx + uv^Tx =$
$Ax = b$. Alltså löser $\hat{x}$ systemet.

1c) För stora n dominerar faktoriseringen med $O(n^3)$ operationer, övriga operationer är lösning av triangulära system och skalärprodukter av lägre ordning. Med metoden i b)-uppgiften faktoriseras endast A, inte $\hat{A}$, och systemen $Ax = b$ och $Az = u$ (för $z = A^{-1}u$) löses med triangulära faktorer. Här behövs alltså bara en faktorisering jämfört med två faktoriseringar, av både A och $\hat{A}$, om man inte utnyttjar b)-uppgiften. För stora n blir det alltså ungefär halva arbetet.

2a) Kompendium avsnitt 9.10.

2b) De två första kolonnerna är redan ortogonala och behöver bara normeras. Den tredje ortogonaliseras mot de två första med Gram-Schmidts metod:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Med normerade kolonner blir alltså
$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Matrisen R får vi sedan som $R = Q^TA = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

2c) SVD-faktorisering, full och kompakt ger $A = U\Sigma V^T = U_1\Sigma_r V_1^T$ där U och V är ortogonala och $r = rang(A)$. Transponering ger $A^T = V_1\Sigma_r U_1^T$. Eftersom Σ_r är reguljär och V_1 har ortogonala kolonner så gäller för värderummet att $V(A) = V(U_1)$. Vidare gäller eftersom U är ortogonal att $A^T U_2 = 0$ så för nollrummet gäller $N(A^T) = V(U_2)$. Från det faktum att U_1 och U_2 är ortogonala mot varandra följer att $V(A)$ är ortogonalt mot $N(A^T)$.

3a) Låt D stå för derivering. För basfunktionerna får vi $D(\sin t) = \cos t$, $D(\cos t) = -\sin t$, $D(\sin 2t) = 2\cos 2t$, $D(\cos 2t) = -2\sin 2t$. Matrisen blir då $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrisen har egenvärdena $\pm i$ och $\pm 2i$ med motsvarande egenvektorer $\begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Egenvektorerna till D är då $\pm i \sin t + \cos t$ och $\pm i \sin 2t + \cos 2t$.

3b) De ingående basfunktionerna är ortogonala med avseende på skalärprodukten. Den bästa approximationen blir då
$\hat{f} = \frac{\langle f,\ \sin t\rangle}{\langle \sin t,\ \sin t\rangle} \sin t + \frac{\langle f,\ \cos t\rangle}{\langle \cos t,\ \cos t\rangle} \cos t + \frac{\langle f,\ \sin 2t\rangle}{\langle \sin 2t,\ \sin 2t\rangle} \sin 2t + \frac{\langle f,\ \cos 2t\rangle}{\langle \cos 2t,\ \cos 2t\rangle} \cos 2t.$
Integralerna beräknas. Den enda täljaren skild från noll är $\langle f,\ \sin t\rangle = \int_0^\pi \sin t\ dt - 2\int_\pi^{2\pi} \sin t\ dt = 2 + 4$ och motsvarande nämnare är $\int_0^{2\pi} \sin t \sin t\ dt = \pi$. Den bästa approximationen blir $\hat{f} = \frac{6}{\pi} \sin t$.
Vid Fourierserieapproximation är konstanta termen med (basfunktion 1) som ger ett bidrag till $\hat{f}$ med $\frac{\langle f,\ 1\rangle}{\langle 1,\ 1\rangle} = \frac{\pi - 2\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}$.

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -5$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (0,0,1)^T,\ v_2 = (3,3,2)^T$ och $v_3 = (3,-3,-4)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 e^{-5t} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet
$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-5t} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

4b) Matrisen blir nu $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Egenvärde är -2 med algebraisk multiplicitet 3. Egenvärdet har geometrisk multiplicitet 1 och är alltså defekt. Det går inte att finna en linjärt oberoende mängd av tre egenvektorer så matrisen är inte diagonaliserbar. Diagonaliseringsmetoden kan alltså inte fungera.

5a) Framåtanalys ger $fl(a^2+b^2) = (a^2(1+\delta_1)+b^2(1+\delta_2))(1+\delta_3)$, där $|\delta_i| \leq \mu,\ i = 1,\ 2,\ 3$ och μ är avrundningsenheten. Utveckling av parenteserna ger $fl(a^2+b^2) = a^2+a^2\delta_1+b^2+b^2\delta_2+a^2\delta_3+a^2\delta_1\delta_3+b^2\delta_3+b^2\delta_2\delta_3$. Framåtfelet blir alltså $fl(a^2+b^2)-(a^2+b^2) = a^2\delta_1+b^2\delta_2+a^2\delta_3+b^2\delta_3+O(\mu^2)$ med uppskattning $|fl(a^2+b^2)-(a^2+b^2)| \leq \mu(a^2+b^2)+\mu(a^2+b^2)+O(\mu^2)$. För det relativa framåtfelet får vi $|\frac{fl(a^2+b^2)-(a^2+b^2)}{a^2+b^2}| \leq 2\mu + O(\mu^2)$.

5b) För bakåtanalysen kan vi skriva från första steget i framåtanalysen i a)-uppgiften: $fl(a^2+b^2) = (a\sqrt{1+\delta_1}\sqrt{1+\delta_3})^2+(b\sqrt{1+\delta_2}\sqrt{1+\delta_3})^2 = \hat{a}^2+\hat{b}^2$ där $\hat{a} = a\sqrt{1+\delta_1}\sqrt{1+\delta_3} = a(1+\frac{\delta_1}{2}+O(\mu^2))(1+\frac{\delta_3}{2}+O(\mu^2)) = a(1+\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_3}{2}+O(\mu^2))$. Det relativa felet i $\hat{a}$ blir $\frac{\hat{a}-a}{a} = \frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_3}{2}+O(\mu^2)$ med en uppskattning $|\frac{\hat{a}-a}{a}| \leq \frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{2}+O(\mu^2) = \mu+O(\mu^2)$. På precis samma sätt fås för relativa felet i $\hat{b}$: $|\frac{\hat{b}-b}{b}| \leq \mu + O(\mu^2)$.

(5c) Relativa bakåtfelen är små enligt b)-uppgiften och därmed är algoritmen stabil.

6a) Vi har det icke-linjära ekvationssystemet $f(x) = 0$ med $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 2x_3^2 + 1 \\ x_2^2 + 3x_3 - 4 \\ x_1x_2 - 2x_1^2x_3 \end{pmatrix}$ Jacobianen blir $J(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 0 & -4x_3 \\ 0 & 2x_2 & 3 \\ x_2 - 4x_1x_3 & x_1 & -2x_1^2 \end{pmatrix}$. För första iterationen har vi $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = x_0 + s_0$, där s_0 är lösningen till ekvationssystemet $J(x_0)s_0 = -f(x_0)$ med $J(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vi får $s_0 = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$. Iterationen ger alltså $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 37 \\ 54 \\ 39 \end{pmatrix}$.

6b) För feluppskattning kan man lösa det linjära ekvationssystemet $J(x_1)s = -f(x_1)$ med Gausselimination (backslash i MATLAB) och uppskatta felet med $\|s\|$.

7a) Problemet är att minimera $f(x)$. En kvasi-Newtonmetod ser ut så här: $\begin{cases} B_ks_k = -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + s_k \end{cases}$, där B_k är en approximation av Hessianen $H(x_k)$.

7b) En sökriktning s_k är en descentriktning om $-s_k^T\nabla f(x_k) > 0$. För en kvasi-Newtonriktning gäller $-s_k^T\nabla f(x_k) = s_k^TB_ks_k > 0$ om B_k är positivt definit.

7c) Vi beräknar $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 + 1 - x_2 \\ 8x_2^3 - x_1 \end{pmatrix}$. Med $x_0 = (0,\ 0)^T$ får vi $\nabla f_0 = (1,\ 0)^T$ och därmed SD-riktningen $s_0 = (-1,\ 0)^T$. Linjesökningsproblemet blir att minimera $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha s_0) = \alpha^2 - \alpha$. Vi får $g'(\alpha) = 2\alpha - 1$ som är noll då $\alpha = 0.5$. Iterationen blir alltså $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8a) Eulers bakåtmetod har approximationsordning 1 och stabilitetsområde utanför enhelscirkel med centrum i $(1, 0)$ i komplexa talplanet.

8b)
(p) $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$
(k) $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$.

Första fixpunktsiterationen: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$
Andra fixpunktsiterationen: $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)))$.

8c) Metoden i b)-uppgiften på testproblemet blir:
$y_{k+1} = y_k + h\lambda(y_k + h\lambda(y_k + h\lambda y_k)) = y_k(1 + h\lambda + (h\lambda)^2 + (h\lambda)^3)$.
Tillväxtfaktor $1+h\lambda+(h\lambda)^2+(h\lambda)^3$ stämmer med två termer i exakta lösningens tillväxtfaktor $1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$. Metoden har approximationsordning 1.
Stabilitetsområdet blir $\{z \in C; |1 + z + z^2 + z^3| \leq 1\}$.