Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1/TM1, TMA671
2015-04-18

DAG: Lördag 18 april 2015 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Åsa Fahlander, tel: 0703-088304
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 11 maj, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a) Gör en LU-faktorisering, utan pivotering, av matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -8 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. **(4p)**
b) Bestäm rangen för matrisen A i a)-uppgiften genom att studera U. **(1p)**
c) Bestäm dimensionen för nollrummet till A genom att tillämpa dimensionssatsen. **(1p)**
d) Avgör genom att studera L från a)-uppgiften om pivotering skulle gett en annan faktorisering. **(1p)**
e) Hur bestämmer man i allmänhet determinanten för en matris utifrån en LU-faktorisering? **(1p)**

Uppgift 2.

a) Visa hur man kan få lösningen till ett linjärt minsta-kvadratproblem med full rang genom QR-faktorisering. Du behöver inte beskriva hur QR-faktoriseringen går till utan du kan anta den given. **(4p)**

b) Gör första steget i en QR-faktorisering med Householdertransformation av matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(3p)**

Uppgift 3.

Betrakta den linjära avbildningen F från P_2 till P_4 definierad av $F(p(t)) = tp(t) - t^2p(t)$, där P_n är det linjära rummet bestående av polynom av grad $\leq n$.

a) Bestäm matrisen för avbildningen F i standardbaserna för P_2 och P_4. **(3p)**

b) Bestäm dimensionerna för värderummet och nollrummet till avbildningen F. **(2p)**

c) Ange ett allvarligt problem med standardbasen för $P_n(0,1)$ för stora värden på n. **(1p)**

d) Vilken teknik kan man använda för att skapa en ON-bas för P_n? **(1p)**

Uppgift 4.

a) Visa att egenvektorer till en matris A som hör till olika egenvärden är linjärt oberoende. **(4p)**

b) Ta fram en faktorisering $A = TDT^T$, där D är diagonal, med hjälp av egenvärden och egenvektorer, till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **(3p)**

c) Vad menas med att ett egenvärde är defekt? **(1p)**

Uppgift 5.

a) Visa att Newtons metod konvergerar kvadratiskt mot en enkelrot till en ekvation. **(4p)**

b) Gör en iteration med Newtons metod med start i origo på det icke-linjära ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 4x_1^2 - 2x_2 - 2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3^3 = 0 \\ x_2^2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(3p)}.$$

Uppgift 6.
a) Vad innebär Runges fenomen i samband med interpolation? **(1p)**
b) Bestäm interpolationspolynomet till punkterna i tabellen

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	4	7

Bestäm en approximation till $f(1.5)$ genom interpolationen. **(3p)**.
c) Bestäm den approximation till $\int_0^3 f(x)\ dx$ som trapetsformeln ger utifrån tabellen i b)-uppgiften **(2p)**

Uppgift 7.
a) Formulera matematiskt linjesökningsproblemet vid optimering i flera variabler utan bivillkor. **(2p)**
b) Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_2$ utan bivillkor. Gör två iterationer med Steepest Descent-metoden, med start i origo och exakt linjesökning. **(4p)**
c) Hur många iterationer hade du behövt för problemet i b)-uppgiften för att komma fram till lösningen om du använt metoden Konjugerad Gradient i stället för Steepest Descent? **(1p)**

Uppgift 8.
a) Bestäm approximationsordning och stabilitetsområde för ODE-lösaren trapetsmetoden. **(4p)**
(b) Anta att du använder prediktor-korrektorparet
(p) Eulers framåtmetod
(k) Trapetsmetoden
Vad blir approximationsordning och stabilitetsområde för metoden? **(1p)**
c) Hur ser metoden i b)-uppgiften ut om du gör en fixpunktsiteration i korrektorn? **(2p)**
d) Gör ett steg med steglängd $h = 0.5$ med metoden i c)-uppgiften på problemet

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t)^2 + t^2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases} \quad \textbf{(3p)}$$

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1/TM1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 18 april 2015

1a) Två stegs Gausselimination ger: $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = U = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L bestäms samtidigt på vanligt sätt (kompendium avsnitt 9.3): $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1b) Två pivotelement i U ger $rangA = 2$.
1c) Dimensionssatsen säger att summan av $rangA$ och dimensionen för nollrummet ska vara lika med antalet kolonner. Alltså blir dimensionen för nollrummet 1.
1d) Pivotering skulle gett ett annat resultat eftersom diagonalelementet i andra kolonnen av L inte är det största i kolonnen.
1e) Produkten av diagonalelementen i U.

2a) Kompendium avsnitt 9.6.
2b) $v_1 = \frac{(3\ 0\ 4\ 0)^T - (5\ 0\ 0\ 0)^T}{\|(-2\ 0\ 4\ 0)^T\|_2} = \frac{1}{\sqrt{20}}(-2\ 0\ 4\ 0)^T$, $H_1 = I - 2v_1v_1^T$.

$H_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $H_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \\ -0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -0.6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3a) $F(1) = t - t^2,\ F(t) = t^2 - t^3,\ F(t^2) = t^3 - t^4,\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3b) Endast nollpolynomet avbildas på nollpolynomet så $dim\ N(F) = 0$, vilket också är $dim\ N(M)$. Vidare gäller $dimP_2 = 3$ så $dim\ V(F) = 3$, vilket också är $dim\ V(M)$.
3c) De blir nästan linjärt beroende, vinkeln mellan basfunktionern $e_n = t^{n-1}$ och $e_{n+1} = t^n$ i standardskalärprodukten går not noll då n går mot ∞.
3d) Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess.

4a) Kompendium, Sats 4.6.

4b) Egenvärdena till den blockindelade matrisen A är egenvärdena till $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, som är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$, plus egenvärdet $\lambda_3 = 2$. Egenvektorerna beräknas på vanligt sätt genom att lösa de homogena systemen $(A - \lambda_i I)x = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3$. Egenvärdena samlas i diagonalen av $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ och egenvektorerna samlas som kolonner i matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ som normeras till ortogonal matris $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4c) Ett egenvärde är defekt om den geometriska multipliciteten är mindre än den algebraiska multipliciteten.

5a) Kompendium avsnitt 6.3.

5b) Med formuleringen $f(x) = 0$ blir $f(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jacobianen beräknas till

$J = \begin{pmatrix} 8x_1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3x_3^2 \\ 0 & 2x_2 & 2 \end{pmatrix}$ med $J(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Newtons metod (formellt):

$x = 0 - J(0)\backslash f(0)$, ekvationslösning $J(0)d = f(0)$ ger $d = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ och $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

6a) För högt gradtal på interpolationen kan felen mellan interpolationspunkterna bli mycket stora.

6b) Newtons form av kubisk interpolation ansätts: $p_3 = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2)$.

Villkoren enligt tabellen ger det triangulära systemet: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

med lösning $a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0.5, \quad d = 0$ och då blir $p_3(1.5) = 1 + 1.5 + 0.5(1.5)(0.5) = 2.875$.

6c) $T(1) = 1(0.5 + 2 + 4 + 3.5) = 10$.

7a) Kompendiet avsnitt 11.7.

7b) Vi beräknar $\nabla f = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3 \end{pmatrix}$. Med $x_0 = (0,\ 0)^T$ får vi $\nabla f_0 = (0,\ 3)^T$ och därmed SD-riktningen $s_0 = (0,\ -3)^T$. Vidare blir Hessianen $H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Enligt formeln för optimal steglängd α vid kvadratisk funktion får vi $\alpha_0 = -\frac{\nabla f_0^T s_0}{s_0^T H s_0} = -\frac{-9}{36} = \frac{1}{4}$ och första iterationen blir $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \end{pmatrix}$. För nästa iteration beräknar vi $\nabla f_1 = (-3/2,\ 0)^T$ och $s_1 = (3/2,\ 0)^T$. Ny linjesökning med $\alpha_1 = -\frac{\nabla f_1^T s_1}{s_1^T H s_1} = -\frac{-9/4}{9} = \frac{1}{4}$ ger $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -3/4 \end{pmatrix}$.

7c) Två iterationer ty högst två konjugerat ortogonala vektorer i R^2

8a) Kompendiet avsnitt 10.4.

8b) Approximationsordning och stabilitetsområde blir det som gäller för korrektorn dvs trapetsmetoden, se a)-uppgiften.

8c)

(p) $y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(t_k, y_k)$

(k) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$.

8d) $y' = 2y^2 + t^2$ dvs $f(t, y) = 2y^2 + t^2$.

Enligt c)-uppgiften får vi med $y_0 = y(0) = 0.5$ och $h = 0.5$:

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0))]$

$= 0.5 + 0.25[2(0.5)^2 + 0 + 2(0.5 + 0.5(2(0.5)^2 + 0))^2 + 0.5^2]$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[\frac{1}{2} + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{18}{16} + \frac{1}{4}) = \frac{31}{32}$.