Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1/TM1, TMA671
2014-08-27

DAG: Onsdag 27 augusti 2014 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Elin Solberg, tel: 0703-088304
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 17 september, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
a) Studera ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = b \\ x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$

där a och b är parametrar.
För vilka a och b har systemet en entydig lösning?
För vilka a och b saknar systemet lösning?
Välj a och b så att systemet har en parameterlösning och skriv upp den lösningen. **(5p)**
b) Låt följande matriser L och U vara faktorer i en LU-faktorisering av en matris B:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Avgör, utan att bilda B, om pivotering har skett, om B är symmetrisk och om B är positivt definit. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Gör en kompakt QR-faktorisering av A med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. **(3p)**

b) En Householdermatris av ordning $n \times n$ har formen $H = I - 2uu^T$ med $u \in R^n$ och $\|u\|_2 = 1$. Utför första steget i en full QR-faktorisering av matisen A med hjälp av en Householdertransformation. **(3p)**

c) Visa att determinanten till en Householdermatris enligt b)-uppgiften är lika med -1. **(2p)**

Uppgift 3.

Betrakta det linjära rummet $V = Span\{t,\ \sin^2 t,\ \cos^2 t\}$, där de angivna funktionerna utgör standardbasen.

a) Visa att även $\{1,\ t,\ \cos^2 t\}$ är bas i V. Bestäm koordinaterna i denna bas för den vektor som i standardbasen har koordinaterna $(2,\ 1,\ 2)$. **(3p)**

b) Betrakta följande linjära avbildning i V, där $c_j,\ j = 1,\ 2,\ 3$ är reella konstanter:

$$F(c_1 t + c_2 \sin^2 t + c_3 \cos^2 t) = c_1 - c_2 - c_3 \sin^2 t.$$

Ta fram matrisen för avbildningen i standardbasen. Bestäm alla egenvärden till avbildningen samt **en** egenvektor till avbildningen. **(3p)**

Uppgift 4.

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Visa att alla singulära värden till A är positiva. **(2p)**

b) Bestäm ett endimensionellt underrum till R^4 sådant att A är negativt definit på underrummet. **(3p)**

c) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = x^T A x$. Bestäm minsta värde på $Q(x)$ under villkor att $x^T x = 2$. Bestäm en vektor u med $u^T u = 2$ så att $Q(u)$ blir minimal. **(2p)**

Uppgift 5.

a) Visa analytiskt att linjär interpolation mellan punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är stabil i meningen att små förändringar i y-värdena ger små förändringar i interpolationspolynomet. **(3p)**

b) Simpsons regel för approximation av $\int_0^1 f(x)\,dx$ lyder

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}[f(0) + 4f(0.5) + f(1)].$$

Visa att kvadratisk interpolation och integration av interpolationspolynomet ger Simpsons regel. **(4p)**

Uppgift 6.

a) Gör två iterationer med *Newtons modifierade metod* med start i origo på det icke-linjära ekvations-systemet:

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 = 2 \\ 2x_1^2 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \textbf{(4p)}.$$

Om du inte vet hur Newtons modifierade metod ser ut så kan du använda den vanliga men då blir det besvärligare och kan högst ge 3p.

b) Beskriv vad som menas med en Kvasi-Newtonmetod. **(1p)**

c) Systemet i a) kan skrivas $x = g(x)$ med $g(x) = \begin{bmatrix} \frac{2+3x_1-3x_1^2}{2x_2} \\ \\ \frac{1-2x_1^2}{2} \end{bmatrix}$. Undersök teoretiskt om *fixpunktsiteration* baserad på denna omskrivning konvergerar vid start nära lösningen $x^* = (-0.5,\ 0.25))$. **(3p)**

Uppgift 7.

a) Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^3 - 2x_2$ utan bivillkor. Gör en iteration med Steepest Descent-metoden, med start i origo och *exakt* linjesökning. **(4p)**
Ledning. Inför en funktion $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha s_0)$.

b) För problemet i a)-uppgiften, gör *approximativ* linjesökning med polynomapproximation. Använd interpolation med andragradspolynom i punkterna $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ och $\alpha = 1$. Använd ledningen i a)-uppgiften. **(3p)**

Uppgift 8.

Betrakta differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = -40x_1(t) + 20x_2(t) + 10x_3(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = 20x_1(t) - 40x_2(t) - 20x_3(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -40x_3(t), & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

a) Undersök om systemet är stabilt. **(2p)**

b) Bestäm en steglängdsgräns för Eulers framåtmetod så att den blir stabil på problemet. **(2p)**

c) Trapetsmetoden sägs vara A-stabil. Vad innebär det? **(1p)**

d) Gör ett steg med Trapetsmetoden på systemet från begynnelsepunkten med steget $h = 0.2$. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1/TM1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 27 augusti 2014

1a) Sätt upp problemet på matrisform, byt rad 1 och 2, gör Gausselimination på utökat system: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & b \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 1-2a & 1 & -ab \\ 0 & -1 & a & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1-2a & 1 & -ab \end{bmatrix}$
$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a(1-2a) & -ab \end{bmatrix}$.
Från detta triangulära system drar vi slutsatserna:
$1 + a - 2a^2 \neq 0$ dvs $a \neq -\frac{1}{2},\ \ a \neq 1$ ger entydig lösning.
$a = -\frac{1}{2},\ \ b \neq 0$ eller $a = 1,\ \ b \neq 0$ ger att lösning saknas.
$a = 1,\ b = 0$ ger parameterlösningen $x = t(-2\ \ 1\ \ 1)^T,\ \ t \in R$.

1b) Pivotering har inte skett eftersom det finns element i L som är större än 1 till belopp. Eftersom $U = DL^T$ med $D = diag(2, 2, 3)$ så är $B = LDL^T$ och därmed symmetrisk. Vidare är $x^T Bx = (L^T x)^T D(L^T x)$ med alla element i D positiva. Alltså är B positivt definit.

2a) De två första kolonnerna är ortogonala. Ortogonalisera den tredje mot dessa två:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{8}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalisera kolonnerna så blir $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \\ -1/2 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} \\ 1/2 & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 0 & 3/\sqrt{12} \end{pmatrix}$.

Matrisen R får vi sedan från produkten $R = Q^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix}$.

2b) Första kolonn i A ska transformeras till första kolonn i R med bevarad längd. Vi får då $\hat{u} = (2,\ 0,\ 0,\ 0)^T - (1,\ -1,\ 1,\ 1)^T = (1,\ 1,\ -1,\ -1)^T,\ \ u = \hat{u}/\|\hat{u}\|_2 = \frac{1}{2}(1,\ 1,\ -1,\ -1)^T$,

$$H = I - 2uu^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad HA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2c) H skiljer sig från I endast med en rang-ett matris $2uu^T$ och har därför $n-1$ egenvärden lika med 1. Det återstående egenvärdet är -1 ty $Hu = u - 2u = -u$. Determinanten är produkten av egenvärdena och är alltså -1.

3) I både a) och b)-uppgifterna använder vi trigonometriska ettan: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
3a) Låt $\mathcal{B}$ vara den givna standardbasen och $\mathcal{C}$ vara den nya basen. Då får vi överföringsmatrisen $= P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och ekvationslösning $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}(u)_{\mathcal{C}} = (u)_{\mathcal{B}}$, där $(u)_{\mathcal{B}} = (2,\ 1,\ 2)^T$, ger lösningen $(u)_{\mathcal{C}} = (1,\ 2,\ 1)^T$.
3b) Vi får $F(t) = 1 = \sin^2 t + \cos^2 t$, $F(\sin^2 t) = -1 = -\sin^2 t - \cos^2 t$, $F(\cos^2 t) = -\sin^2 t$ och matrisen för avbildningen blir $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Matrisen har egenvärdena $0, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Egenvektorn tillhörande egenvärdet 0 är (för matrisen) $(1,\ 1,\ 0)^T$ och för avbildningen alltså $t + \sin^2 t$.

4a) $\det(A) = \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}) = (-2)(12) = -24$ så A är icke-singulär och alla singulära värden är då positiva.
4b) Egenvärdena till A är egenvärdena till $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, som är 2 och -1 plus egenvärdena till $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, som är 2 och 6. A är negativt definit på underrummet som spänns av egenvektorn som hör till det negativa egenvärdet. Egenvektorn till egenvärdet -1 beräknas på vanligt sätt till $v = (1,\ 2,\ 0,\ 0)^T$ och det sökta rummet är Span$\{v\}$.
4c) För den kvadratiska formen gäller $Q(x)/x^Tx \geq -1$ (minsta egenvärdet) och att detta minsta värde antas för $x = v$ (från b)-uppgiften), normerad korrekt. Vi får att $u = \sqrt{2/5}v = \sqrt{2/5}(1,\ 2,\ 0,\ 0)^T$ och att $Q(u) = -2$ är det sökta minsta värdet på $Q(x)$.

5a) För interpolationspolynomet gäller $p_1(x) = y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2 - y_1)$ och för det störda interpolationspolynomet $\hat{p_1}(x) = \hat{y_1} + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(\hat{y_2} - \hat{y_1})$. Felet δp i interpolationen kan alltså skrivas $\delta p(x) = \hat{p_1}(x) - p_1(x) = \hat{y_1} - y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(\hat{y_2} - y_2 - \hat{y_1} + y_1)$. Om felen i y-värdena är begränsade av δ så får vi $|\delta p(x)| \leq \delta|1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}| + \delta|\frac{x-x_1}{x_2-x_1}|$. Om $x_1 \leq x \leq x_2$ dvs interpolation så får vi $|\delta p(x)| \leq \delta(1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}) + \delta\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \delta$.
5b) Låt $f_1 = f(0)$, $f_2 = f(0.5)$, $f_3 = f(1)$ och använd Newtons form av kvadratisk interpolation: $p_2 = a + bx + cx(x - 0.5)$. Villkoren ger:
$x = 0 \Rightarrow a = f_1$, $\ x = 0.5 \Rightarrow a + 0.5b = f_2 \Rightarrow b = 2(f_2 - f_1)$
$x = 1 \Rightarrow f_1 + 2(f_1 - f_2) + 0.5c = f_3 \Rightarrow c = 2(f_3 - 2f_2 + f_1)$.
Interpolationspolynomet blir $p_2(x) = f_1 + 2(f_2 - f_1)x + 2(f_3 - 2f_2 + f_1)x(x - 0.5)$ och integrering ger $\int_0^1 p_2(x)\,dx = f_1 + (f_2 - f_1) + \frac{1}{6}(f_3 - 2f_2 + f_1) = \frac{1}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3)$. Här har vi använt att $\int_0^1 x(x - 0.5)\,dx = \frac{1}{12}$.

6a) Vi skriver ekvationssystemet som $f(x) = 0$, där $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - 2 \\ 2x_1^2 + 2x_2 - 1 \end{pmatrix}$.

Jacobianen beräknas till $J(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 - 3 & 2x_1 \\ 4x_1 & 2 \end{pmatrix}$.

I startpunkten origo blir $f_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $J_0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ekvationssystemet $J_0 s_0 = -f_0$ har lösningen $s_0 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ och första iterationen blir $x_1 = x_0 + s_0 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. För andra iterationen behåller vi Jacobianen och får $f_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/9 \end{pmatrix}$. Systemet $J_0 s_1 = -f_1$ har lösningen $s_1 = \begin{pmatrix} 2/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$ och andra iterationen blir $x_2 = x_1 + s_1 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6b) I en Kvasi-Newton-metod itererar man enligt $B_k s_k = -f(x_k)$, $\quad x_{k+1} = x_k + s_k$, där B_k är en lämplig approximation av Jacobianen $J(x_k)$.

6c) Vi beräknar Jacobianen till $g(x)$: $G(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-6x_1}{2x_2} & -\frac{2+3x_1-3x_1^2}{2x_2^2} \\ -2x_1 & 0 \end{pmatrix}$ och vi får

$G(x^*) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Normen för denna matris är större än 1 så vi kan inte räkna med konvergens. Kravet är att normen för G ska vara strikt mindre än 1 nära lösningen (och att man startar i en omgivning där detta gäller).

7a) Vi beräknar $\nabla f = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + 3x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$. Med $x_0 = (0,\ 0)^T$ får vi $\nabla f_0 = (0, \ -2)^T$ och därmed SD-riktningen $s_0 = (0,\ 2)^T$. Vi följer ledningen och inför $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha s_0) = f((0,\ 2\alpha)^T) = 8\alpha^3 - 4\alpha$. Vi minimerar genom att sätta $g'(\alpha) = 0$ där $g'(\alpha) = 24\alpha^2 - 4$, som ger $\alpha_0 = \sqrt{1/6}$ med $g''(\alpha_0) = 48\alpha_0 > 0$. Vi får alltså första SD-iterationen: $x_1 = x_0 + \alpha_0 s_0 = (0,\ 0)^T + \sqrt{1/6}(0,\ 2)^T = \sqrt{1/6}(0,\ 2)^T$.

7b) Med $g(\alpha)$ från a)-uppgiften får vi $g(0) = 0$, $g(1/2) = -1$, $g(1) = 4$. Ansätt ett andragradspolynom genom punkterna genom $p_2 = 0 + c_1\alpha + c_2\alpha(\alpha - 1)$ så att $p_2(0) = 0$ genom ansatsen. Interpolationsvillkor ger: $p_2(1) = c_1 = 4$ och $p_2(1/2) = 2 - c_2/4 = -1 \Rightarrow c_2 = 12$ så att $p_2 = 4\alpha + 12\alpha(\alpha - 1)$. Vi minimerar p_2 genom att sätta $p_2' = 0$ där $p_2' = 24\alpha - 8$ som ger $\alpha_0 = 1/3$. Vi får alltså första SD-iterationen: $x_1 = x_0 + \alpha_0 s_0 = (0,\ 0)^T + 1/3(0,\ 2)^T = 1/3(0,\ 2)^T$.

8a) Systemet kan skrivas på systemform $x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T$ med $A = \begin{pmatrix} -40 & 20 & 10 \\ 20 & -40 & -20 \\ 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$. Egenvärdena till A är $\lambda_1 = -20, \;\lambda_2 = -60, \quad \lambda_3 = -40$. De är alla negativa så systemet är stabilt.

8b) För stabiltet hos Eulers framåtmetod krävs att $-2 \leq h \cdot \lambda \leq 0$ för alla egenvärdena λ. Egenvärdet $\lambda_2 = -60$ ställer högst krav och ger gränsen $h \leq 1/30$.

8c) Metoden är stabil för alla stabila problem oavsett val av steglängd.

8d) Trapetsmetoden kan skrivas: $(I - \frac{h}{2}A)x_{i+1} = (I + \frac{h}{2}A)x_i, \; i = 0, \; 1, \; ....$ Med givet A och $h = 0.2$ blir första steget:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekvationssytemet löses och ger $x_1 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.