Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2014-01-18

DAG: Lördag 18 januari 2014 TID: 14.00 - 18.00 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 7 februari, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Studera ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = b \\ x_1 + bx_3 = a \end{cases}$$

där a och b är (reella) parametrar.
a) För vilka a och b har systemet en entydig lösning?
För vilka a och b saknar systemet lösning?
Välj a och b så att systemet har en parameterlösning och skriv upp den lösningen. **(4p)**
b) Låt $a \neq 0$ och gör en LU-faktorisering (utan pivotering) av matrisen till systemet. **(3p)**

Uppgift 2.
a) Definiera vad som menas med rang(A), rangen till en matris. **(1p)**
b) Visa att om A är en $n \times n$ -matris med rang(A) $= n$ så har det homogena ekvationssystemet $Ax = 0$ endast den triviala lösningen $x = 0$. **(3p)**
c) Visa att om A är en $m \times n$ -matris och B är en $n \times p$ -matris så är rang(AB) $\leq$ rang(A) och rang(AB) $\leq$ rang(B). **(4p)**

Uppgift 3.
Betrakta följande avbildningar:
(1) $T : R^3 \to R^3$ definerad av $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1, x_1 + x_2 - 2, x_3 + x_1 - x_2)$
(2) $T : R^2 \to R^3$ definierad av $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, 2x_1 - x_2)$
(3) $T : R^3 \to R^2$ definierad av $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_3 - x_1)$
a) Avgör för var och en av avbildningarna om de är linjära eller inte. Motivera svaret. **(3p)**
b) För de avbildningar i a) som är linjära, ta fram matriserna för avbildningarna samt avgör om de är *på* (*onto* på engelska) och/eller *ett-ett* (*one to one* på engelska). **(4p)**

Uppgift 4.
Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
a) Visa att alla singulära värden till A är positiva. **(2p)**
b) Bestäm ett tvådimensionellt underrum till R^3 sådant att A är positivt definit på underrummet. **(3p)**
c) Lös differentialekvationssystemet $x'(t) = Ax(t),\ t \geq 0,\ x(0) = [\ 0 \quad -3 \quad 2\ ]^T$ med diagonaliseringsmetoden. **(3p)**

Uppgift 5.
a) Definiera vad som menas med ett *flyttalssystem*. **(2p)**
b) Ge exempel på ett flyttalssystem med basen 10 och bestäm UFL (”under flow limit”) och OFL (”over flow limit”) för systemet. **(2p)**
c) Vad menas med *gradual underflow*? Ge ett par exempel på tal som representerar gradual underflow i ditt system i b)-uppgiften. **(2p)**

Uppgift 6.

a) Betrakta Newtons metod för att lösa en skalär ekvation $f(x) = 0$. Skriv upp metoden som en fixpunktsiteration och motivera på så sätt den snabba konvergensen nära en lösning x^* där $f'(x^*) \neq 0$. **(4p)**

b) Gör en iteration med *Newtons metod* med start i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på det icke-linjära ekvationssystemet: $\begin{cases} x_1^2 - x_1 x_2^2 = 0 \\ x_1^3 + x_2^2 = 1 \end{cases}$. **(3p)**

Uppgift 7.

Betrakta funktionen $f(t) = t^3 + t^4$ på intervallet $[0,\ 1]$.

a) Vi vill bestämma bästa approximation till f i underrummet P_2 (mängden av polynom av grad ≤ 2) med avseende på skalärprodukten $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\ dt$. Använd standardbasen för P_2 och sätt upp det linjära ekvationssystem som ska lösas för att få fram approximationen. Ingående integraler i matriselementen ska räknas ut men systemet behöver inte lösas. **(4p)**

b) För funktionen i a)uppgiften får vi tabellen.

t	0	1/3	2/3	1
f	0	4/81	40/81	2

Vi önskar anpassa den olinjära modellen $\Psi(x, t) = \sin(x_1 t) + x_2(t + 1) + e^{x_3 t}$ till tabellen i minsta-kvadrat-mening. Teckna Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Ange explicit hur residual och Jacobian ser ut i första iterationen om du startar i origo. Iterationssteget behöver inte utföras (beräknas). **(4p)**

Uppgift 8.

Betrakta differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = -20x_1(t) + 10x_2(t) + 10x_3(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = 10x_1(t) - 20x_2(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -10x_3(t), & x_3(0) = 1 \end{cases}$$

a) Undersök om systemet är stabilt. **(2p)**

b) Bestäm en steglängdsgräns för Eulers framåtmetod så att den blir stabil på problemet. **(2p)**

c) Trapetsmetoden sägs vara A-stabil. Vad innebär det? **(1p)**

d) Gör ett steg med Trapetsmetoden på systemet från begynnelsepunkten med steget $h = 0.2$. **(4p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 18 januari 2014

1a) Sätt upp problemet på matrisform, byt rad 1 och 3, gör Gausselimination på utökat system: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ a & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1-ab & -a^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & -ab & -a^2+b \end{bmatrix}$.
Från detta triangulära system drar vi slutsatserna:
$a \neq 0, \quad b \neq 0$ ger entydig lösning.
$a = 0, \quad b \neq 0$ eller $b = 0, \quad a \neq 0$ ger att lösning saknas.
$a = b = 0$ ger parameterlösningen $x = t[0 \;\; 1 \;\; 1]^T, \quad t \in R$.

1b) LU-faktorisering görs som Gausselimination för att få U, L bestäms samtidigt utifrån regeln att samma operationer som gör A till U ska göra L till I:
$\begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/a & b-1/a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = U.$
L blir enligt regeln $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/a & 1/a & 1 \end{bmatrix}$.

2a) Rangen för en matris är dimensionen av värderummet (kolonnrummet).
2b) Låt $a_j, \ j = 1, \ \ldots, \ n$ vara kolonnerna i matrisen A. Då gäller $Ax = x_1a_1 + \ldots + x_na_n$ där $x_j, \ j = 1, \ \ldots, \ n$ är komponenterna i vektorn x. Eftersom kolonnerna är linjärt oberoende när rangen är full så är denna summa *0* endast om alla $x_j = 0$, dvs $Ax = \mathit{0} \Rightarrow x = \mathit{0}$.
2c) Låt $b_j, \ j = 1, \ \ldots, \ p$ vara kolonnerna i matrisen B. Då är $Ab_j, \ j = 1, \ \ldots, \ p$ kolonnerna i AB och dessa ligger alla i värderummet för A. Kolonnerna i AB kan alltså inte spänna ett rum med större dimension än värderummet för A, dvs $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$.
Om detta resultat tillämpas på matrisen $(AB)^T$ får vi:
$\text{rang}(AB) = \text{rang}((AB)^T) = \text{rang}(B^TA^T) \leq \text{rang}(B^T) = \text{rang}(B)$. Vi använder här att kolonnrang och radrang är lika, dvs $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$ för alla matriser A.

3a) (1) är inte linjär eftersom $T(\mathit{0}) = (0, \ -2, \ 0) \neq \mathit{0}$. (2) och (3) kan skrivas på form $T(x) = Ax$ och är alltså linjära avbildningar. Matriserna A är matriserna för avbildningarna enligt b)-uppgiften.
3b) (2) Matrisen är $A = [T(e_i) \;\; T(e_2)]$ där $\{e_1 \;\; e_2\}$ är standardbasen i R^2. Vi får $T(e_1) = (1, \ -1, \ 2)$ och $T(e_2) = (1, \ 1, \ -1)$ och matrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
Avbildningen är inte *på* eftersom två kolonner inte kan spänna R^3. Avbildningen är *ett-ett* eftersom kolonnerna är linjärt oberoende.

(3) Matrisen är $A = [T(e_i)\ \ T(e_2)\ \ T(e_3)]$ där $\{e_1\ \ e_2\ \ e_3\}$ är standardbasen i R^3. Vi får $T(e_1) = (1,\ -1)$, $T(e_2) = (2,\ 0)$ och $T(e_3) = (0,\ 1)$ och matrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Avbildningen är *på* eftersom kolonnerna spänner R^2. Avbildningen är inte *ett-ett* eftersom kolonnerna inte är linjärt oberoende.

4a) $\det(A) = -6 \neq 0$ så A är icke-singulär och alla singulära värden är då positiva.
4b) Egenvektorer och egenvärden beräknas. Notera att A är blockdiagonal för att förenkla räkningarna. Vi får egenvärden med tillhörande egenvektorer:
$\lambda_1 = 2,\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T,\ \lambda_2 = -1,\ v_2 = [\ 1\ \ 2\ \ 0\ ]^T,\ \lambda_3 = 3,\ v_3 = [\ 1\ \ 2\ \ 4]^T.$
A är positivt definit på runderrummet som spänns av egenvektorerna som hör till de positiva egenvärdena alltså Span$\{v_1,\ v_3\}$.
4c Problemet löses med hjälp av egenvärdena och egenvektorerna, som är beräknade i b)-uppgiften. Vi får enligt lösningsformeln:

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} a + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1,\ c_2,\ c_3$ bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

som har lösningen $c_1 = 1,\ \ c_2 = -3/2$ och $c_3 = 1/2$. Systemts lösning blir alltså

$$x(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \tfrac{3}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} a + \tfrac{1}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5a) Kvadruppeln $(\beta,\ p,\ L,\ U)$ definierar tal på formen $x = m \cdot \beta^e$, där
$m = \pm d_0.d_1 d_2 ... d_{p-1},\ 0 \leq d_i < \beta,\ 0 < d_0 < \beta,\ 1 \leq |m| < \beta,\ L \leq e \leq U.$
5b) Ta exempelvis $(10,\ 5,\ -9,\ 9)$. ”underlow”-gräns är minsta positiva tal i ett flyttalssystem $= \beta^L = 10^{-9}$, ”overflow”-gräns är största positiva tal $= \beta^{U+1}(1-\beta^{-p}) = 10^{10}(1-10^{-5})$.
5c) ”Gradual underflow” representeras av alla tal mellan 0 och ”underflow”-gräns dvs mellan 0 och 10^{-9}. Exempel på sådana tal är $0.9 \cdot 10^{-9}$ och 10^{-10}.

6a) Newtons metod: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0,\ 1,\ ....$ Som fixpunktsiteration blir det $x_{i+1} = F(x_i),\ i = 0,\ 1,\ ...,$ där $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Fixpunktsiterationen konvergerar om $|F'(x)| \leq c < 1$ i en omgivning av x^*, med snabbare konvergens ju mindre c är. Här gäller $F'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)f'(x^*) - f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 1 - 1 = 0$ ty $f(x^*) = 0$. Detta motsvarar konvergenskriterium $c = 0$ (i lösningen) alltså mycket snabb konvergens nära lösningen.
6b) Vi skriver ekvationssystemet som $f(x) = 0$, där $f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1 x_2^2 \\ x_1^3 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}$. Jacobianen beräknas till $J(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2^2 & -2x_1 x_2 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{bmatrix}$.
I startpunkten $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ blir $f_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $J_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet

$J_0 s_0 = -f_0$ har lösningen $s_0 = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.125 \end{bmatrix}$ och första iterationen blir

$x_1 = x_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.875 \end{bmatrix}$.

7a) Bästa approximation innebär att felet ska vara ortogonalt mot underrummet P_2, dvs mot alla baselementen i P_2, där vi har valt standardbasen. Om $\hat{f}$ är bästa approximation så ska det alltså gälla att:

$< f - \hat{f},\ 1 >= 0, \quad < f - \hat{f},\ t >= 0, \quad < f - \hat{f},\ t^2 >= 0.$

Om vi ansätter $\hat{f} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ så får vi ett linjärt ekvationssystem för att bestämma $c_0,\ c_1$ och c_2:

$$\begin{bmatrix} <1,\ 1> & <t,\ 1> & <t^2,\ 1> \\ <1,\ t> & <t,\ t> & <t^2,\ t> \\ <1,\ t^2> & <t,\ t^2> & <t^2,\ t^2> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <f,\ 1> \\ <f,\ t> \\ <f,\ t^2> \end{bmatrix}.$$

Med uträknade integraler får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 + 1/5 \\ 1/5 + 1/6 \\ 1/6 + 1/7 \end{bmatrix}. \text{ (Hilbertmatrisen)}$$

7b) Låt $f_i = \Psi(x, t_i) - \Psi_i$ vara residualerna där Ψ_i är uppmätt värde i tid t_i enligt tabellen.

Vi får då $f = \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ \sin(\frac{1}{3}x_1) + \frac{4}{3}x_2 + e^{\frac{1}{3}x_3} - \frac{4}{81} \\ \sin(\frac{2}{3}x_1) + \frac{5}{3}x_2 + e^{\frac{2}{3}x_3} - \frac{40}{81} \\ \sin(x_1) + 2x_2 + e^{x_3} - 2 \end{bmatrix}$.

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3}\cos(\frac{1}{3}x_1) & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_3} \\ \frac{2}{3}\cos(\frac{2}{3}x_1) & \frac{5}{3} & \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x_3} \\ \cos(x_1) & 2 & e^{x_3} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newtons metod skrivs: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + s_k \\ J(x_k)s_k = -f(x_k) \end{cases}$

Med start i $x_0 = [0\ 0\ 0]^T$ blir $f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 77/81 \\ 41/81 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $J(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 2/3 & 5/3 & 2/3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

8a) Systemet kan skrivas på systemform $x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ med $A = \begin{bmatrix} -20 & 10 & 10 \\ 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$. Egenvärdena till A är $\lambda_1 = -30,\ \lambda_2 = -10,\ \lambda_3 = -10$. De är alla negativa så systemet är stabilt.

8b) För stabiltet hos Eulers framåtmetod krävs att $-2 \leq h \cdot \lambda \leq 0$ för alla egenvärdena λ. Egenvärdet $\lambda_1 = -30$ ställer högst krav och ger gränsen $h \leq 2/30$.

8c) Metoden är stabil för alla stabila problem oavsett val av steglängd.
8d) Trapetsmetoden kan skrivas: $(I - \frac{h}{2}A)x_{i+1} = (I + \frac{h}{2}A)x_i,\ i = 0,\ 1,\ ....$ Med givet A och $h = 0.2$ blir första steget:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssytemet löses och ger $x_1 = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.125 \\ 0 \end{bmatrix}$.